MAGNO ALVES DE OLIVEIRA (Taiobeiras-MG). Matemático probabilista, é licenciado pela Universidade Federal de Viçosa (UFV) e doutor pela Universidade de Brasília (UnB). Atua como docente do Instituto Federal de Brasília (IFB).

LUCIANA LIMA VENTURA (Brasília - DF). Matemática teórica dos números, é licenciada, bacharel e doutora pela Universidade de Brasília (UnB). Atua como docente do Instituto Federal de Brasília (IFB).

ISBN 978-85-64124-18-9

9 788564 124189

INSTITUTO FEDERAL
BRASÍLIA

Ministério da Educação

GOVERNO FEDERAL
BRASIL
PAÍS RICO É PAÍS SEM POBREZA

AGCOM

UM CURSO DE CÁLCULO
PARA TECNÓLOGOS

IFB

UM CURSO DE CÁLCULO PARA TECNÓLOGOS

MAGNO ALVES DE OLIVEIRA
LUCIANA LIMA VENTURA

EDITORA
IFB

Ministrar o primeiro curso de Cálculo do Instituto Federal de Brasília – IFB foi um desafio. A disciplina surgiu no curso superior Tecnólogo em Agroecologia, do campus Planaltina, já no primeiro semestre do curso (em 2009), e serviria de pré-requisito para diversas outras disciplinas aplicadas que se valeriam das ferramentas do Cálculo para serem desenvolvidas.

Num esforço de adaptação à esse curso, foram produzidas notas de aulas. Essas notas foram testadas com os estudantes do semestre seguinte, quando foi possível visualizar uma notável adequação. Esse ajustamento pode estar relacionado à natureza e às particularidades dos cursos de tecnologia.

A nossa intenção é de disponibilizar ao estudante de cursos desta modalidade um material mais direto que possa conduzi-lo ao desenvolvimento de uma visão global sobre o Cálculo Diferencial e Integral numa medida em que consiga alcançar os objetivos do seu curso e que seja suficientemente estimulante a aprofundar os seus estudos nesta área do conhecimento. Essa medida considera as possíveis lacunas existentes na sua formação básica e não acredita que elas possam inviabilizar o processo de aprendizagem de ferramentas mais sofisticadas da matemática.

UM CURSO DE CÁLCULO PARA TECNÓLOGOS

Magno Alves de Oliveira
Luciana Lima Ventura

EDITORA IFB
Brasília-DF
2013

UM CURSO DE CÁLCULO PARA TECNÓLOGOS

Magno Alves de Oliveira
Luciana Lima Ventura

EDITORA IFB
Brasília-DF
2013

EDITORA IFB

SGAN 610, Módulos D, E, F e G
CEP 70860-100 - Brasília -DF
Fone: +55 (61) 2103-2108
www.ifb.edu.br
E-mail: editora@ifb.edu.br

Coordenação de Publicações Juliana Rocha de Faria Silva

Produção executiva Sandra Maria Branchine

Gráfica Divisão AGPRESS-AGBR Grupo AGBR

Tiragem 1.000

Ficha Catalográfica preparada por
Cecília Morena Maria da Silva - CRB 1/2429

V468c Oliveira, Magno Alves de.
Um curso de cálculo para tecnólogos / Magno Alves de Oliveira; Luciana Lima Ventura.-- Brasília, DF : Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Brasília, 2012.
178 p.

Bibliografia
ISBN 978-85-64124-18-9

1. Análise matemática. 2. Cálculo. 3. Ensino técnico.
I. Oliveira, Magno de. II. Título.

CDU – 517:377

Sumário

Introdução

O Cálculo Diferencial e Integral é uma disciplina básica que aparece em um grande número de cursos superiores, especialmente nos cursos de ciências exatas e da terra, de ciências sociais aplicadas, nas engenharias e nos cursos de tecnologia.

Os cursos superiores em tecnologia (tecnólogos), entretanto, apresentam especificidades que exigem que o estudante atinja determinadas competências em um curto espaço de tempo. É exatamente essa peculiaridade que os distinguem de outros cursos e que os dota de natureza e dinâmica próprias.

Em geral, os estudantes apresentam muitas dificuldades até adquirirem as competências, relacionadas ao estudo do Cálculo Diferencial e Integral, necessárias para prosseguirem os seus estudos de forma proficiente. Algumas razões que justificam essas dificuldades são listadas abaixo:

- custo elevado dos livros disponíveis no mercado;
- os materiais existentes não favorecem a construção de uma visão global do objeto de estudo em pouco tempo;
- os livros clássicos são muito dependentes de pré-requisitos e muitos deles supõem que o leitor já deva possuí-los; e
- de uma maneira geral, os livros de cálculo usam a metodologia de repetição

exaustiva de rotinas para fazer com que o leitor apreenda os conceitos básicos envolvidos no processo.

Por sua particularidade, essas dificuldades são agravadas nos cursos superiores de tecnologia e, sobretudo, naqueles operados por Institutos Federais, uma vez que esses últimos se diferenciam das universidades em organização, acessibilidade e propósitos.

O nosso interesse em escrever este livro surgiu da necessidade:

- da existência de materiais mais enxutos e adaptados aos cursos tecnólogos;
- de que seja feita uma abordagem do cálculo mais independente da suposição de pré-requisitos construídos no Ensino Médio, dado que o processo de construção de tais pré-requisitos é, ainda, insatisfatório;
- de se refletir sobre os aspectos mais relevantes do Ensino Médio que levem à compreensão das ferramentas do Cálculo; e
- de uma metodologia mais direta e adaptada à velocidade de formação do profissional tecnólogo.

Diante da acentuação e agravamento dos problemas relacionados à escolarização básica no Brasil, este livro pretende ser uma ponte entre o conhecimento matemático residual do leitor acumulado até o final do Ensino Médio e o Cálculo Diferencial e Integral, naquilo que ele tem de essencial.

Nesse sentido, propomos o livro "Um curso de cálculo para tecnólogos". A nossa abordagem busca uma orientação para a compreensão dos conceitos e desenvolvimento da intuição, ao contrário da abordagem tradicional que visa o trabalho repetitivo e treinamento excessivo e desmotivador.

O conteúdo deste livro está organizado em três capítulos. O primeiro capítulo tem dois objetivos centrais: (i) familiarizar o leitor com a linguagem formal da teoria de conjuntos, especialmente o conjunto dos números reais, e com a organização lógica do pensamento; e (ii) fazer com que o leitor perceba que grandezas se relacionam de diferentes maneiras e que é importante o estudo desses variados comportamentos para o aprofundamento em questões que apresentam diferentes níveis de complexidade.

No Capítulo 2, são apresentados elementos da teoria de funções, numa abordagem geral. Em particular, é feito um estudo sobre a teoria de funções de uma variável real, que se ajusta ao estudo do comportamento de duas grandezas de uma maneira mais abrangente.

As ideias dos capítulos 1 e 2 são pré-requisitos para o desenvolvimento da teoria do cálculo diferencial e integral, que é objeto de abordagem no Capítulo 3. O principal objetivo desse último capítulo é desenvolver a intuição do leitor quanto ao conceito de limites, com alguma formalização, com vistas à prova do Teorema Fundamental do Cálculo e o desenvolvimento de técnicas de cálculo para abordagem de situações que envolvam variação instantânea de grandezas relacionadas.

Ao finalizar o estudo deste livro, esperamos que o leitor tenha desenvolvido uma visão geral preliminar sobre o cálculo diferencial e integral, que é, desde que foi concebido, uma das mais potentes ferramentas para o desenvolvimento da ciência e tecnologia. Esperamos, portanto, que o leitor se sinta motivado a apronfundar os seus estudos nessa área. Um bom conhecimento em torno dos princípios dessa ferramenta possibilitará uma melhor compreensão de problemas relacionados ao seu cotidiano profissional e o domínio dela potencializará as possibilidades de intervenção na realidade, por meio da modelagem de problemas e da compreensão refinada do comportamento das funções.

Ressaltamos o caráter introdutório dessas idéias e esperamos que a linguagem utilizada seja libertadora o suficiente para que o leitor ouse alçar novos vôos por essa teoria.

1. Uma introdução à teoria de conjuntos

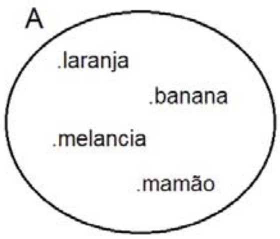
Uma noção fundamental para o estudo que pretendemos desenvolver ao longo deste trabalho é a noção de **conjunto**. Na verdade, é impossível desenvolver a ideia do que é um conjunto dissociada daquela do que é **elemento**. Chamamos de conjunto a qualquer coleção de objetos, coisas ou seres, ainda que vazia. Cada um desses objetos, coisas ou seres é dito ser um elemento do conjunto.

Dois conjuntos serão **iguais** se possuírem exatamente os mesmos elementos, e serão distintos se diferirem um do outro pela quantidade de elementos ou pela presença de pelo menos um elemento num deles que difere de todos os elementos do outro. Esse conceito será formalizado mais adiante.

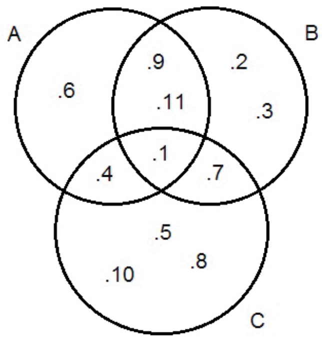
Note que até mesmo pra falar de **conjunto vazio** precisamos falar de elemento, ou melhor, da sua ausência. Quando um conjunto é vazio, costumamos representá-lo como $\emptyset$ ou $\{\}$.

Representaremos um conjunto qualquer ora por letras maiúsculas do nosso alfabeto (A, B, C, ...) ou por letras maiúsculas do alfabeto grego (Γ, Ω, Δ,...), ora listando seus elementos, quando isso for possível, ora por uma descrição inequívoca de seus elementos, ou simplesmente por meio de um esquema pictográfico. Já elementos serão representados por letras minúsculas do nosso alfabeto (a, b, c, ...) sempre que necessário.

Um conjunto também pode ser representado por um diagrama de Venn. Por exemplo, o conjunto $A = \{\text{laranja, banana, melancia, mamão}\}$ tem como representação por meio do diagrama de Venn a seguinte figura:



Esse tipo de representação permite uma visualização de agumas propriedades de conjunto como a pertinência, ou não, de elementos e inclusive quando o elemento pertence a mais de um conjunto. Observe a figura abaixo:



temos que $6 \in A$, mas $6 \notin B$, enquanto $11 \in A$ e $11 \in B$. Esse tipo de representação tem suas limitações uma vez que, para um número maior de conjuntos, desenhar o diagrama de Venn não é tarefa fácil.

Exemplo 1.1. A expressão

$$\{0,\, 1,\, 2,\, ...\}$$

representa o **conjunto dos números naturais**. Outras maneiras de representar esse mesmo conjunto são

$$\mathbb{N}$$

ou

$$\{x\,;\, x \text{ é um número natural}\}.$$

Exemplo 1.2. O conjunto

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3,\, -2,\, -1,\, 0,\, 1,\, 2,\, 3, \ldots\}$$

representa o **conjunto dos números inteiros**.

Exemplo 1.3. O conjunto

$$\mathbb{Q} = \left\{x = \frac{m}{n};\, m \in \mathbb{Z}\, e\, n \in \mathbb{Z}^*\right\}$$

representa o **conjunto dos números racionais**[1]. Cada elemento x de $\mathbb{Q}$ é dito ser uma **fração**, e toda fração admite uma representação decimal, resultado da divisão do seu numerador pelo seu denominador. Por exemplo,

$$\frac{1}{2} = 0,5 \text{ (representação decimal finita)}$$

e

$$\frac{1}{3} = 0,333\ldots \text{ (\textbf{dízima periódica})}.$$

Exemplo 1.4. Chamamos de **conjunto dos números reais** e denotamos por $\mathbb{R}$ o conjunto dos números que possuem representação decimal finita ou infinita. Observe

[1] O símbolo $*$ sobrescrito ao conjunto $\mathbb{Z}$ significa que estamos excluindo o zero do conjunto, ou seja, $\mathbb{Z}^* = \{\pm 1,\, \pm 2,\, \pm 3,\, \ldots\}$. Isto é devido ao fato de não se definir frações com denominador nulo.

que, pelo exposto no Exemplo 1.3, todo número racional é um número real. No entanto, existem números com representação decimal infinita que não admitem representação na forma de fração. É o caso, por exemplo, do número $0,30300300030000\ldots$. Números como esse também são chamados de **dízimas não periódicas** ou **números irracionais**[2].

Se um conjunto A possui um elemento, digamos a, então dizemos que a **pertence** a A, e denotamos essa condição por

$$a \in A. \tag{1.1}$$

Quando um elemento qualquer b não faz parte da coleção A, dizemos que b **não pertence** a A, e denotamos essa condição por

$$b \notin A. \tag{1.2}$$

As relações (1.1) e (1.2) são chamadas de **relações de pertinência**, pois dizem respeito à posição relativa entre um elemento e um conjunto.

Podemos, também, considerar a posição relativa entre dois conjuntos quaisquer. Para isso, introduzimos a noção de **subconjunto**.

Definição 1.1. Dados dois conjuntos A e B, dizemos que A é subconjunto de B se todo elemento de A é também elemento de B. Denotamos essa condição assim: $A \subset B$.

[2]Existem muito mais números irracionais do que racionais. Para se convencer disso, para cada número racional existente, podemos gerar mais de um número irracional correspondente. Por exemplo, para o número racional $0,333...$, podemos gerar os números irracionais $0,30300300030000\ldots$ e $0,31311311131111\ldots$ e, para o número racional $0,5$, podemos gerar $0,530300300030000\ldots$ e $0,531311311131111\ldots$.

Mais formalmente[3], podemos reescrever a Definição 1.1 assim:

$$A \subset B \Leftrightarrow a \in A \Rightarrow a \in B. \tag{1.3}$$

A expressão $A \subset B$ pode ser lida de três maneiras distintas: *A é parte de B* ou *A está contido em B*. De qualquer maneira, o seu significado preciso está descrito pela sentença lógica (1.3).

Explorando um pouco mais a Definição 1.1, podemos concluir que para que um conjunto A não seja um subconjunto de um conjunto B basta que ela possua um elemento que não pertença a B. Denotaremos essa situação assim:

$$A \not\subset B. \tag{1.4}$$

Assim, podemos concluir que o conjunto vazio é subconjunto de qualquer[4] conjunto, isto é,

$$\oslash \subset A, \forall \text{ conjunto } A.$$

As relações (1.3) e (1.4), que definem as posições relativas entre dois conjuntos quaisquer, são também chamadas de **relações de inclusão**.

Neste ponto, podemos formalizar o conceito de **igualdade de conjuntos**:

Definição 1.2. Dados dois conjuntos A e B, dizemos que $A = B$ se, e semente se, $A \subset B$ e $B \subset A$.

Pela definição acima, é fácil perceber que $\{1, 2\} = \{2, 1\} = \{1, 1, 1, 2, 2\}$. Fica claro, também, que a terminologia que estamos usando para conjuntos visa representar a variedade da informação presente em uma coleção.

[3] Proposições lógicas do tipo "$p \Rightarrow q$" podem ser lida asssim: se *p então q* , ou ainda , *p implica q*. Já proposições do tipo "$p \Leftrightarrow q$" podem ser lidas como *p se, e somente se, q*, ou ainda, *p é equivalente a q*, e significam que $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$

[4] O símbolo $\forall$ pode ser lido assim: *para todo* ou *qualquer que seja*.

Exemplo 1.5. Considere o conjunto

$$B = \{1,\ \{1, 2\},\ 3\}.$$

Note que B é uma coleção de 3 elementos. Em particular, temos que $\{1,\ 2\} \in B$. No entanto, $\{1,\ 2\} \not\subset B$, já que $2 \notin B$.

De volta aos exemplos 1.1, 1.2, 1.3 e 1.4, concluimos que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

1.1 O conjunto das partes de um conjunto

Dado um conjunto qualquer B, vimos que ele admite pelo menos um subconjunto, que é o conjunto vazio. Se substituirmos A na Definição 1.1 pelo próprio B, concluimos que $B \subset B$. Assim, o conjunto vazio e o próprio conjunto B são subconjuntos de B, também referidos como sendo os seus **subconjuntos triviais**.

Um conjunto pode admitir **subconjuntos não triviais** (ou próprios). Por exemplo, considere os conjuntos

$$C = \{\text{estudantes do IFB}\}$$

e

$$D = \{\text{estudantes do curso Tecnólogo em Agroecologia do IFB}\}.$$

Temos que $D \neq \emptyset$ e $D \neq C$. Como $D \subset C$, temos que D é um subconjunto próprio de C.

Voltemos ao conjunto arbitrário B e pensemos em todos os seus subconjuntos. À coleção de todos esses objetos, damos o nome de **Conjunto das partes de** B, que denotaremos por $\wp(B)$ ou 2^B.

Exemplo 1.6. Considere o conjunto E $= \{1,\ 2\}$. Então $\wp(E) = \{\emptyset,\ \{1\},\ \{2\},\ \{1,\ 2\}\}$.

No último exemplo, vemos que o conjunto E possui 2 elementos, enquanto que o conjunto $\wp(E)$ possui 4 elementos. À quantidade de elementos de um dado conjunto B, damos o nome de **cardinalidade** e, neste trabalho, será denotada assim: $\#B$. De volta ao Exemplo 1.6, temos que $\#E = 2$ e $\#\wp(E) = 4$.

Neste momento, já podemos observar que existem conjuntos com cardinalidade infinita, isto é, conjuntos com uma quantidade infinita de elementos. Volte aos exemplos 1.1 e 1.3 e note que $\#\mathbb{N} = \infty$ e $\#\mathbb{Q} = \infty$. Isso não significa que $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$ tenham a mesma quantidade de elementos. De fato, é fácil observar que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ e que $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ mas $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$, o que mostra que existem mais números racionais do que naturais.

A cardinalidade de um conjunto é que o define como um **conjunto finito** ou como um **conjunto infinito**.

Exemplo 1.7. O **intervalo limitado real** $I = (0, 1]$, isto é, o conjunto de todos os números reais maiores do que 0 e menores ou iguais a 1 é um conjunto infinito.

No exemplo anterior, apresentamos o que chamamos de intervalo limitado real, que são subconjuntos do **conjunto dos números reais** $\mathbb{R}$ que apresentam um dos seguintes formatos

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R},\ a < x < b\},$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x < b\},$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$$

ou

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}.$$

Dado um intervalo limitado real, podemos imaginar infinitos números que satisfaçam a relação que o define. No entanto, diferentemente do caso de $\mathbb{N}$ (o conjunto dos números naturais) não podemos listar os seus elementos. Em outras palavras, podemos entender o conjunto $\mathbb{N}$ como uma lista ordenada de números, razão pela qual dizemos que todo conjunto que apresenta essa característica é **enumerável**. Pense um pouco e veja que o conjunto I do Exemplo 1.7 é **não enumerável**, isto é, não apresenta essa característica.

Um **intervalo real** pode não ser limitado. Neste caso, a relação que o define assume um dos formatos abaixo:

$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}, x > a\},$$

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R}, x < b\},$$

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}, x \geq a\}$$

ou

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}, x \leq b\}.$$

Podemos representar $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ e $\{a\} = [a, a]$ como casos degenerados da caracterização acima. Além disso, $\oslash = (a, a), (a, a]$ ou $[a, a)$.

Obviamente, se um conjunto B é infinito então o conjunto $\wp(B)$ também o será. A razão de usarmos a notação 2^B para representar o conjunto das partes do conjunto B é porque se $\#B$ é finita, então $\#\wp(B) = 2^{\#B}$.

Reexaminando a situação proposta no Exemplo 1.6, vemos que

$$\#\wp(E) = 4 = 2^2 = 2^{\#E}.$$

1.2 Operações com conjuntos

Dados conjuntos quaisquer, podemos definir sobre eles diversas operações. As mais usuais são **união**, **interseção**, **diferença** e **produto cartesiano**.

Antes de partir para as definições propriamente ditas, convém esclarecer o significado de dois importantes conectivos lógicos: o **e** (denotado por $\wedge$) e o **ou** (denotado por $\vee$).

O conectivo $\wedge$ se remete à simultaneidade. Por exemplo, dizemos "essa propriedade possui rebanhos bovino e suíno" para informar a presença das duas espécies de rebanho na propriedade, simultaneamente. É bem diferente dizer "essa propriedade possui rebanho bovino ou suíno", proposição que informa, na verdade, a presença de pelo menos um dos tipos de rebanho.

Em outros termos, considere as proposições

p: essa propriedade possui rebanho bovino

e

q: essa propriedade possui rebanho suíno.

As proposições compostas $p \wedge q$ e $p \vee q$ representam, respectivamente, as duas frases do exemplo do parágrafo anterior. O conectivo $\wedge$ diz que ambas as proposições p e q têm valor lógico verdadeiro, enquanto o conectivo $\vee$ garante que pelo menos uma das proposições p e q tem valor lógico verdadeiro.

Compreendido o significado exato desses conectivos, estamos aptos a definir as principais operações para conjuntos.

Definição 1.3. Dados dois conjuntos, A e B, dizemos que a interseção de A e B, denotada por $A \cap B$, é o conjunto

$$A \cap B = \{x;\ x \in A\ \wedge\ x \in B\}.$$

Definição 1.4. Dados dois conjuntos, A e B, dizemos que a união de A e B, denotada por $A \cup B$, é o conjunto

$$A \cup B = \{x;\ x \in A\ \vee\ x \in B\}.$$

Definição 1.5. Dados dois conjuntos, A e B, dizemos que a diferença entre A e B, denotada por $A - B$, é o conjunto

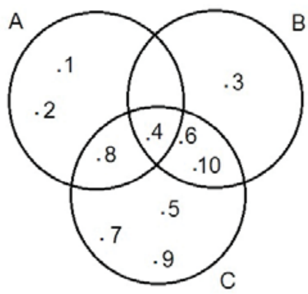
$$A - B = \{x;\ x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Em particular, quando $A \subset B$, o resultado das operações definidas acima para esses conjuntos fica: $A \cap B = A$, $A \cup B = B$ e $A - B = \emptyset$. Neste caso, costuma-se chamar a diferença $B - A$ como o **complemento** de A em relação a B e denotá-la por $C_B(A)$ ou C_B^A.

Exemplo 1.8. Considere os conjuntos $M = \{1,\ 2,\ 3\}$ e $N = \{2,\ 3,\ 4\}$. Temos que $M \cap N = \{2,\ 3\}$, $M \cup N = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $M - N = \{1\}$ e $N - M = \{4\}$.

Exemplo 1.9. Considere os intervalos $I = (0, 1]$ e $J = [1/2, 3/2)$. Temos que $I \cap J = [1/2, 1]$, $I \cup J = (0, 3/2)$, $I - J = (0, 1/2)$ e $J - I = (1, 3/2)$.

Exemplo 1.10. Sejam A, B, e C os conjuntos representados abaixo.



As áreas em azul representam, respectivamente, as seguintes operações: $(A \cup B) - C$, $(A \cap C) \cup (B \cap C)$, $(A \cup C) - (A \cap C)$ e $B - (A \cup C)$.

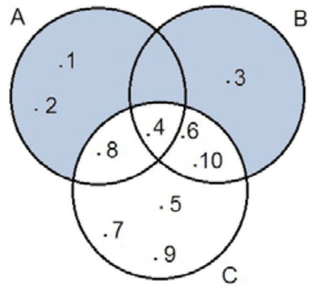


Figura 1.1: $(A \cup B) - C$

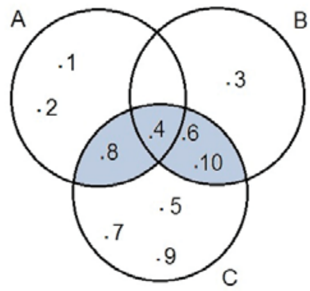


Figura 1.2: $(A \cap C) \cup (B \cap C)$

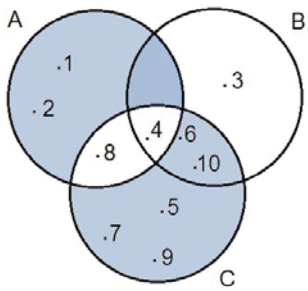


Figura 1.3: $(A \cup C) - (A \cap C)$

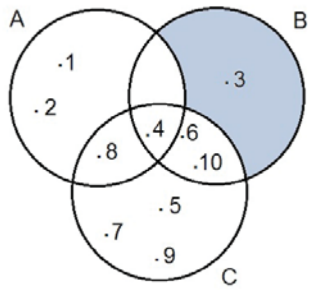


Figura 1.4: $B - (A \cup C)$

Exemplo 1.11. Sejam $I = (-1, \pi]$ e $J = [\sqrt{2}, 4)$. Temos que:

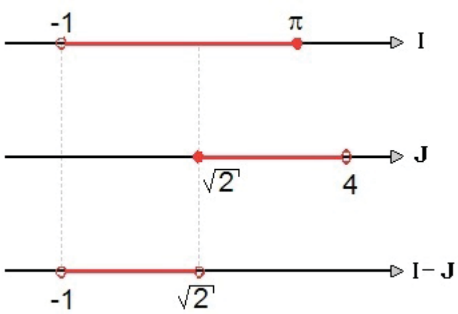


Figura 1.5: $I - J = (-1, \sqrt{2})$

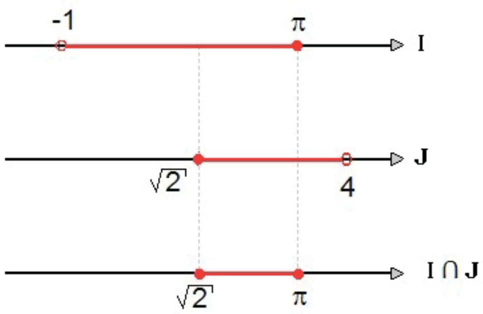


Figura 1.6: $I \cap J = [\sqrt{2}, \pi]$

Definição 1.6. Dados dois conjuntos, A e B, dizemos que o produto cartesiano entre A e B, denotado por $A \times B$, é o conjunto

$$A \times B = \{(x, y);\, x \in A \,\wedge\, y \in B\}.$$

Observe que os elementos do conjunto $A \times B$ não são elementos de A nem de B. Eles possuem um natureza híbrida e são chamados de **vetores**. Cada entrada do vetor carrega informação relacionada ao respectivo conjunto no produto cartesiano.

Exemplo 1.12. Sejam M e N como no Exemplo 1.8. Temos que o vetor $(1,\, 2) \in M \times N$, isto porque $1 \in M$ e $2 \in N$. No entanto, $(1,\, 2) \notin N \times M$.

Dados dois conjuntos finitos A e B, a cardinalidade do conjunto $A \times B$ é calculada assim:

$$\#(A \times B) = \#A \cdot \#B,$$

isto é, o número de vetores da forma $(x,\, y)$ que conseguimos formar com elementos do conjunto A na primeira entrada e elementos do conjunto B na segunda entrada corresponde ao produto da cardinalidade dos dois conjuntos envolvidos. Quando o produto cartesiano apresenta pelo menos um conjunto infinito, então, sua cardinalidade será infinita.

Exemplo 1.13. Sejam I e J os conjuntos apresentados no Exemplo 1.9. Temos que o vetor $\left(\frac{1}{3},\, 1\right) \in I \times J$, enquanto que o vetor $\left(1,\, \frac{1}{3}\right) \notin I \times J$. Além disso, $\#(I \times J) = \infty$, isto é, o conjunto $I \times J$ contém infinitos vetores.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1. Considere os conjuntos $A = \{\text{vogais do alfabeto}\} = \{\text{a, e, i, o, u}\}$ e $B = \{\text{números naturais pares}\} = \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$. Escreva com símbolos:

   a) e pertence ao conjunto das vogais;

b) t não pertence ao conjunto das vogais;

c) i pertence ao conjunto das vogais;

d) 16 pertence ao conjunto dos números pares;

e) 27 não pertence ao conjunto dos números pares;

f) π não pertence ao conjunto dos números pares.

2. Dado o conjunto $A = \{1, 2, 3, \{4\}, \{5, 6\}\}$, julgue verdadeiro (V) ou falso (F), justificando suas respostas:

a) ( ) o conjunto A tem 6 elementos;

b) ( ) $0 \in A$;

c) ( ) $0 \subset A$;

d) ( ) $\{0\} \in A$;

e) ( ) $\{0\} \subset A$;

f) ( ) $4 \in A$;

g) ( ) $4 \subset A$;

h) ( ) $\{4\} \in A$;

i) ( ) $\{4\} \subset A$;

j) ( ) $\{\{4\}\} \subset A$;

k) ( ) $3 \in A$;

l) ( ) $\{5, 6\} \in A$;

m) ( ) $\{1\} \subset A$;

n) ( ) $\{2, 3\} \subset A$;

o) ( ) $\{5, 6\} \subset A$.

3. Numa pesquisa de opinião pública a respeito do consumo de duas marcas de um mesmo produto, 50 pessoas foram entrevistas, dentre as quais 30 declararam consumir o produto A, 35 declararam consumir o produto B e 5 declararam não consumir nenhum dos produtos. Quantos desses consumidores consomem ambos os produtos?

a) 20

b) 25

c) 15

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

d) 5

e) 10

4. (IFB) Em certo ano, uma escola com 500 estudantes oferecia oficinas e a matricula era obrigatória em pelo menos uma delas e o estudante poderia se matricular em, no máximo, duas. Feitas as matriculas, apurou-se que 200 estudantes fariam música e 200 fariam judô. Sabendo-se que o número de estudantes que farão ambas as atividades acima corresponde a metade do numero de estudantes que farão outras oficinas, assinale a única alternativa INCORRETA:

   a) 100 estudantes não farão musica nem judô.

   b) 100 estudantes matricularam-se apenas musica.

   c) 100 estudantes matricularam-se em musica e judô.

   d) 100 estudantes matricularam-se apenas em judô.

   e) O número de estudantes que se matricularam só em música ou só em judô é igual ao número de estudantes não farão nem música nem judô.

5. (IFB) Numa escola há 500 estudantes. Sabendo-se que a quantidade de meninos é três vezes maior que a quantidade de meninas, então estudam nessa escola

   a) 375 meninos e 125 meninas

   b) 125 meninos e 375 meninas

   c) 400 meninos e 100 meninas

   d) 100 meninos e 400 meninas

   e) 333 meninos e 111 meninas

6. (IFB) Considere que, dos 50 hóspedes de um hotel, 35 tomaram café pela manhã e 35 tomaram leite. Sabendo que 10 deles optaram por não tomar café nem leite, assinale a opção INCORRETA.

a) 5 hóspedes tomaram leite, mas não tomaram café.

b) 5 hóspedes tomaram café, mas não tomaram leite.

c) 10 hóspedes tomaram só café ou só leite.

d) 40 hóspedes tomaram café ou tomaram leite.

e) 40 hóspedes tomaram café e leite.

7. Considere os conjuntos $R = \{\text{norte, sul, leste, oeste}\}$ e $S = \{\text{norte, sul}\}$.

    a) Determine $\wp(R)$ e $\wp(S)$.

    b) Determine $\#\wp(R)$ e $\#\wp(S)$.

    c) Qual a relação que existe entre $\wp(M)$ e $\wp(N)$?

8. Considere o diagrama a seguir e determine:

    a) $A \cup B$;

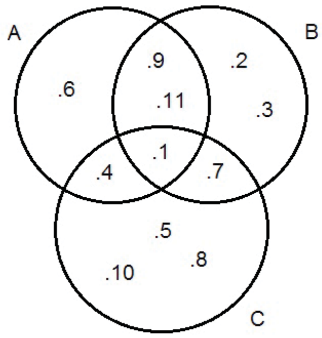
    b) $B \cap C$;

    c) $(A \cup B) - C$;

    d) $(B \cap C) - A$;

    e) $A \cap B \cap C$;

    f) $(A \cup B) \cap (A \cap C)$;



    g) dois suconjuntos de B com cardinalidades diferentes;

    h) dois subconjuntos de $A \cup C$ que não sejam subconjuntos de A nem de C;

    i) $A \cap B \cap C$;

    j) $A \times B$;

    k) $\#(B \times C)$.

9. Considere os intervalos reais $A = [1, 4)$ e $B = [2, 5]$. Determine os seguintes conjuntos:

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

a) $A \cup B$;

b) $A \cap B$;

c) $A - B$;

d) $B - A$;

e) $A \, \Delta \, B$.

1.3 Conjuntos numéricos

Nas seções anteriores, vimos exemplos de importantes conjuntos constituídos por números: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$. Nos referiremos a esses conjuntos, ou a seus subconjuntos, como sendo **conjuntos numéricos**.

O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ foi apresentado no Exemplo 1.3 como sendo o conjunto dos números que possuem uma representação no formato de fração. Mas o que quer dizer uma fração?

1.3.1 Uma interpretação para frações

Inicialmente, observe que todo número inteiro pode ser escrito no formato de fração. Por exemplo,

$$2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{200}{100} = \frac{-2.000}{-1.000}. \tag{1.5}$$

É por isso que dizemos que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Considere, agora, a fração

$$\frac{3}{2} = 1,5. \tag{1.6}$$

Note que $1,5$ é a representação decimal da fração $\frac{3}{2}$, obtida pela aplicação do algoritmo da divisão. Podemos interpretar a Equação (1.6) assim:

o tamanho do número 3 é 1,5 vez o tamanho do número 2.

Analogamente, se considerarmos a fração

$$\frac{4}{5} = 0,8, \tag{1.7}$$

podemos interpretá-la como

o tamanho do número 4 é 0,8 vez o tamanho do número 5.

Quando consideramos frações com denominador 100, dizemos ter aí um **número percentual** e o símbolo % é usado para denotar essa situação. Por exemplo,

$$\frac{20}{100} = 0,2 = 20\% \quad \text{(lê-se: vinte por cento).}$$

Para se calcular um percentual qualquer de um dado número, basta multiplicar o número percentual pelo número dado.

Exemplo 1.14. Numa fazenda, o rebanho bovino é constituido de 500 cabeças, das quais 20% são vacas leiteiras. Então, o número de vacas leiteiras da fazenda é

$$20\% \text{ de } 500 = 0,2 \cdot 500 = 100.$$

Assim, podemos voltar o olhar para a Equação (1.6) e propor a seguinte interpretação para ela:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} = 1,5 \quad &\Rightarrow \quad 3 = 1,5 \cdot 2 \\ &\Rightarrow \quad 3 = (1 + 0,5) \cdot 2 \\ &\Rightarrow \quad 3 = 1 \cdot 2 + 0,5 \cdot 2 \\ &\Rightarrow \quad 3 = 2 + 50\% \cdot 2\,, \end{aligned}$$

isto é,

3 corresponde ao número 2 aumentado de 50%.

Analogamente, podemos interpretar a Equação (1.7) assim:

$$\begin{aligned}\frac{4}{5} = 0,8 \quad &\Rightarrow \quad 4 = 0,8 \cdot 5\\ &\Rightarrow \quad 4 = (1-0,2)\cdot 5\\ &\Rightarrow \quad 4 = 1\cdot 5 - 0,2\cdot 5\\ &\Rightarrow \quad 4 = 5 - 20\% \cdot 5\,,\end{aligned}$$

isto é,

4 corresponde ao número 5 reduzido de 20%.

Em suma, quando trabalhamos com frações, não podemos nos esquecer que estamos comparando dois números, vendo quanto o numerador é maior ou menor do que o denominador. Esse raciocínio pode ser usado para calcular rapidamente aumentos ou descontos percentuais.

Exemplo 1.15. Numa fazenda, o rebanho bovino é constituido de 500 cabeças. Entre elas, há um touro recentemente adquirido com a intensão de aumentar o rebanho, ao final de 2010, em 20%. Assim, ao final de 2010, a previsão é que o rebanho passe a ser de 600 cabeças. De fato,

$$500 \text{ aumentado de } 20\% = 500 + 0,2\cdot 500 = 500(1+0,2) = 500\cdot 1,2 = 600.$$

Exemplo 1.16. Numa fazenda, o rebanho bovino é constituido de 500 cabeças. Uma doença atingiu o rebanho e dizimou 20% daquela população. Assim, restam 400 cabeças. De fato,

$$500 \text{ reduzido de } 20\% = 500 - 0,2\cdot 500 = 500(1-0,2) = 500\cdot 0,8 = 400.$$

Generalizando as ideias expostas nos exemplos 1.14, 1.15 e 1.16, considere uma quantidade qualquer C e um número percentual i. Para calcular o percentual i de C, basta multiplicar $i \cdot C$; para calcular a quantidade C com um aumento percentual i, basta multiplicar $(1+i) \cdot C$ e, finalmente, para se calcular o valor de C, submetido a um desconto percentual i, basta multiplicar $(1-i) \cdot C$.

Exemplo 1.17 (Juros compostos). Um capital de R$5.000,00 foi aplicado na poupança, que rende juros mensais fixos de $0,5\%$ ao mês. Vamos acompanhar a evolução desse capital ao longo do tempo, denotando por $M(t)$ o montante t meses após a aplicação. Observe que

$$M(0) = 5.000,$$

$$M(1) = 5.000 \cdot (1 + 0,005) = 5.000 \cdot 1,005,$$

$$M(2) = M(1) \cdot 1,005 = (5.000 \cdot 1,005) \cdot 1,005 = 5.000 \cdot (1,005)^2,$$

$$M(3) = M(2) \cdot 1,005 = [5.000 \cdot (1,005)^2] \cdot 1,005 = 5.000 \cdot (1,005)^3,$$

$$M(4) = M(3) \cdot 1,005 = [5.000 \cdot (1,005)^3] \cdot 1,005 = 5.000 \cdot (1,005)^4$$

e, em geral, passados t meses após a aplicação, teremos um montante igual a

$$M(t) = M(t-1) \cdot 1,005 = [5.000 \cdot (1,005)^{t-1}] \cdot 1,005 = 5.000 \cdot (1,005)^t.$$

Se considerarmos um capital qualquer C sendo investido numa aplicação que tem uma taxa fixa de retorno mensal i qualquer, como particularizado no Exemplo 1.17, obteremos que o montante $M(t)$ da aplicação ao longo do tempo t obedece a lei

$$M(t) = C \cdot (1+i)^t,$$

que é a famosa **função exponencial** que regula os chamados **juros compostos**.

1.3.2 Dízimas periódicas

Dízimas periódicas são frações que não possuem representação decimal finita, mas apresentam um comportamento decimal bem definido, estruturado, previsível. Por exemplo, os números

$$\frac{1}{3} = 0,3333..., \quad -\frac{7}{6} = -1,1666... \quad \text{e} \quad \frac{21}{99} = 0,21212...$$

são dízimas periódicas, pois conseguimos advinhar quais os próximos números nas suas representações decimais infinitas. Já para o número $32,785689102...$, essa tarefa é impossível. Trata-se, portanto, de um número **irracional**.

No dia a dia, fazemos aproximações quando lidamos com números desse tipo que podem ser truncamento ou arredondamento. Fazer aproximações de um número com representação decimal infinita (não necessariamente dízima periódica) consiste em escolher uma quantidade conveniente de casas decimais. No caso do truncamento, as demais casas decimais são desprezadas.

Exemplo 1.18. Quando falamos de dinheiro, $\frac{1}{3}$ de real é, aproximadamente, $0,33$ real. Representaremos essa situação assim:

$$\frac{1}{3} \approx 0,33.$$

Essa situação pode ser vista como um truncamento.

Já no caso do arredondamento, deve haver um critério que nos faça decidir se as demais casas decimais serão desprezadas ou acrescerão uma unidade à última casa decimal que será preservada no número.

Exemplo 1.19. O sistema de registro de notas do IFB em 2009 admitia apenas as notas 0, $1/2$, 1, $3/2$, $\cdots$, $19/2$, 10 como registro do aproveitamento final de cada etapa. Se a soma das notas parciais relativas aos instrumentos avaliativos de uma etapa fosse qualquer número diferente dos admitidos, o critério era arredondá-lo para a nota maior e mais próxima dentre a admitidas. Em outras palavras, um estudante cuja soma de pontos for $5,333...$ no $1°$ bimestre terá sua nota lançada como $5,5$.

No entanto, em muitas situações essa praticidade pode não ser suficiente e, dependendo da grosseria da aproximação, erros podem se propagar e gerar grandes prejuízos materiais ou levar a conclusões não razoáveis. É o que acontece, por exemplo, em se tratando de programação computacional.

Quando lidamos com dízimas periódicas, sempre é possível saber qual é a fração que a gerou, também conhecida como **fração geratriz**. Para isso, basta considerar um múltiplo à potência de 10 adequada da dízima periódica e subtrair desse múltiplo a dízima, obtendo, assim, sua fração geratriz.

Exemplo 1.20. Sabemos que $y = 0,4444...$ é uma dízima periódica. Neste caso, se fizermos a conta $10y - y$ obteremos uma representação em forma de fração para y. De fato,

$$10y - y = 4 \Rightarrow 9y = 4 \Rightarrow y = \frac{4}{9}.$$

No exemplo anterior, a potência 10 foi escolhido por conveniência, já que a parte periódica na subtração se alinha, tornando a conta possível de ser feita. O exemplo abaixo apresenta uma situação diferente.

Exemplo 1.21. Sabemos que $z = 1,1232323...$ é uma dízima periódica. Neste caso, a fração geratriz de z será obtida efetuando-se a conta $100z - z$. De fato,

$$100z - z = 112,323232... - 1,123232...,$$

isto é,

$$99z = 111,2.$$

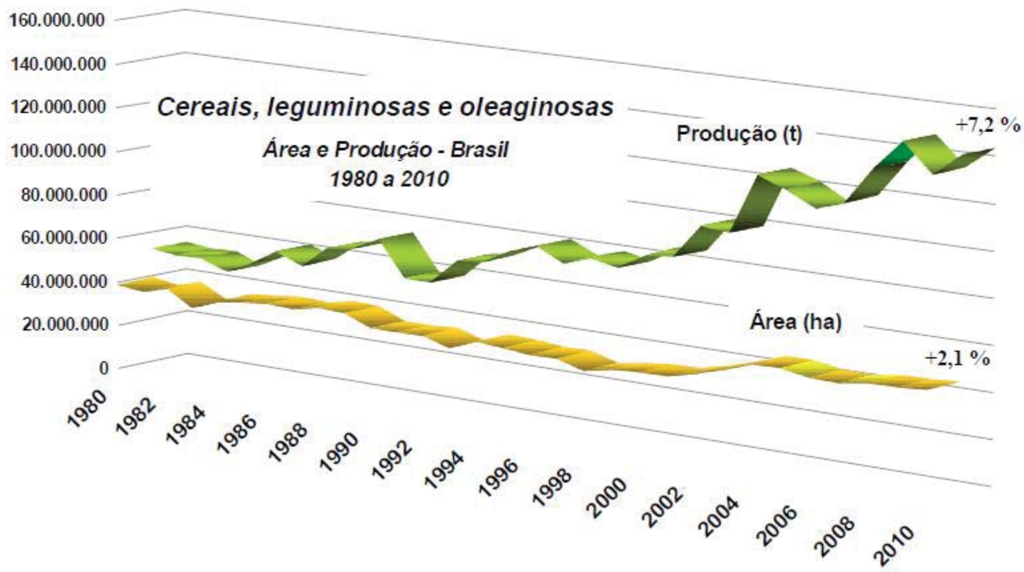
Isso significa que

$$z = \frac{111,2}{99} = \frac{1.112}{990}.$$

Neste último exemplo, a conveniência exigiu que a potência 10^2 fosse a escolhida, já que o **período**[5] da dízima periódica possuía dois números.

1.3.3 Proporcionalidade

Vimos, como na Equação 1.6, que um mesmo número racional pode ser escrito sob forma de fração de diversas maneiras diferentes. Vimos também que a divisão de (**razão** entre) dois números expressa uma comparação entre eles, ou seja, o quanto o numerador é maior ou menor do que o denominador da fração.



Fonte: IBGE

Figura 1.7: Cereais, leguminosas e oleaginosas: área e produção no Brasil de 1980 a 2010.

Exemplo 1.22. "Nesta primeira avaliação da safra nacional dos cereais, leguminosas e oleaginosas para 2010, estima-se uma produção de 143,4 milhões de toneladas,

[5] O período de uma dízima periódica corresponde à quantidade de números que tem seu comportamento reproduzido ao infinito.

superior $7,2\%$ à obtida no ano passado. A área a ser colhida é $2,1\%$ maior que a da safra de 2009 que foi de 47,2 milhões de hectares" (*Fonte: IBGE, adaptado*).

Observe neste exemplo que foram comparados números que expressam quantidades de uma mesma **grandeza**[6], no caso, as grandezas tonelada e área. O exemplo abaixo é um pouco diferente.

Exemplo 1.23. Na frase "...o avião foi perdendo altura, a razão de 7 mil pés por minuto e se despedaçou"[7], a razão empregada expressa a velocidade de queda do avião e, de forma equivalente, poderia ser informada como 14 mil pés por 2 minutos, ou 420 mil pés por hora.

Note que o numerador e denominador da razão deste exemplo retratam quantidades de grandezas diferentes (comprimento e tempo). Todavia, se pensarmos que

$$\frac{7 \text{ mil pés}}{1 \text{ minuto}} = \frac{7}{1} \cdot \frac{\text{mil pés}}{\text{minuto}} = 7 \cdot \frac{\text{mil pés}}{\text{minuto}},$$

concluímos que a razão entre as duas grandezas determina outra grandeza, a velocidade de queda do avião.

No nosso cotidiano, as grandezas se relacionam o tempo todo. Por exemplo, ao comprarmos um produto no supermercado, o valor a ser pago no caixa se relaciona com a quantidade do produto; quando pegamos um táxi, as grandezas preço da corrida e distância percorrida se relacionam; quando um bioquímico administra uma substância a fim de inibir o crescimento de uma colônia de bactérias, o tempo de reação do medicamento se relaciona com o tamanho da população residual de bactérias; quando um agrônomo suplementa a alimentação de um rebanho, as grandezas quantidade de alimento consumido e massa do animal podem estar relacionadas.

---

[6] Entendemos por grandeza como sendo o atributo físico de um corpo que pode ser qualitativamente distinguido e quantitativamente determinado. Como exemplos de grandezas, temos a distância percorrida por um carro, a altura de um prédio, o tempo de vida de um animal, a espessura de uma camada de asfalto, a cardinalidade de um conjunto finito, dentre outras.

[7] Trecho extraído de matéria publicada no *site* <http://pt.wikinews.org>, em 16 de agosto de 2005.

O fato é que duas ou mais grandezas podem se relacionar das mais diferentes formas. Trataremos, aqui, de uma forma muito particular de relacionamento entre grandezas, mas de grande utilidade para resolver problemas simples do nosso dia a dia: a proporcionalidade.

Intuitivamente, observamos a proporcionalidade entre duas grandezas incrementando uma delas e observando se esta ação gera um incremento relativamente igual na outra grandeza ou inverso. No primeiro caso, diremos que as grandezas são **diretamente proporcionais** e, no segundo caso, diremos que elas são **inversamente proporcionais**.

Os exemplos abaixo nos ajudarão a melhorar a nossa intuição a respeito desse conceito.

Exemplo 1.24. Um cliente vai a um supermercado comprar leite. Lá, um litro de leite de caixinha é vendido a R$ 1,75. Assim, a grandeza "valor da conta" será diretamente proporcional à grandeza "quantidade de caixinhas". Isso porque, se o cliente dobrar a quantidade de caixinhas, terá sua conta dobrada, se triplicá-la, terá sua conta triplicada, e assim por diante.

Exemplo 1.25. Num determinado horário, uma empresa de táxi cobra, por corrida, uma bandeirada, no valor de R$ 4,00, mais R$ 0,50 por cada duzentos metros rodados. Se um cliente desejar percorrer 2 quilômetros, pagará R$ 9,00 pela corrida, enquanto que, se desejar percorrer 4 quilômetros, pagará R$ 14,00. Note que as grandezas "tamanho da corrida" e "preço da corrida" não são diretamente proporcionais, já que o dobro do tamanho da corrida não implica no dobro do seu preço.

Exemplo 1.26. Um carro faz um percurso fixo a uma velocidade média de 30 km/h e gasta uma hora. Se, na volta, ele dobrar a velocidade média ele reduzirá o tempo de viagem à metade. Se ele triplicar a velocidade média, seu tempo de viagem será reduzido a um terço do inicial. Assim, as grandezas "velocidade média" e "tempo de viagem" são inversamente proporcionais.

Formalmente, temos a seguinte definição.

Definição 1.7. Duas grandezas são ditas diretamente proporcionais quando apresentam **variação linear**, isto é, quando a razão entre as duas grandezas é constante[8], e são ditas inversamente proporcionais quando apresentam **variação hiperbólica**, isto é, quando o produto das duas é constante[9].

Para associar a definição formal de proporcionalidade com a noção intuitiva construída anteriormente, sejam $X(\cdot)$ e $Y(\cdot)$ duas grandezas relacionadas. Essas grandezas apresentarão variação linear se

$$\frac{X(t)}{Y(t)} = c, \text{ qualquer que seja o } t,$$

e apresentarão variação hiperbólica se

$$X(t) \cdot Y(t) = c, \text{ qualquer que seja o } t,$$

onde c é uma constante qualquer não nula.

Assim, se no Exemplo 1.24, $X(\cdot)$ representa a "quantidade de caixinhas" e $Y(\cdot)$ representa o "valor da conta", então, $X(2)$ representará duas caixas de leite e $Y(2)$ representará o preço pago por duas caixas de leite. Vemos[10], facilmente, que

$$\frac{Y(2)}{X(2)} = \frac{3,50}{2} = 1,75,$$

$$\frac{Y(3)}{X(3)} = \frac{5,25}{3} = 1,75$$

[8] Conhecida como constante de proporcionalidade direta.
[9] Conhecida como constante de proporcionalidade inversa.
[10] As unidades referentes a cada grandeza foram, por simplicidade, omitidas, mas devem ser carregadas na interpretação dos problemas.

e, em geral,

$$\frac{Y(k)}{X(k)} = \cdots = 1,75, \quad \text{seja qual for o } k \in \mathbb{N}.$$

Analogamente, no Exemplo 1.26, se considerarmos as grandezas $X(\cdot)$ e $Y(\cdot)$ como sendo, respectivamente, "velocidade média" e "tempo de viagem", teremos satisfeita a equação

$$X(k) \cdot Y(k) = 30, \ \text{seja qual for o } k.$$

As constantes R$ 1,75 e 30 km obtidas acima são conhecidas como **constantes de proporcionalidade**.

1.3.4 Regra de três

Apesar da proporcionalidade ser um tipo de relação muito particular entre grandezas, ela aparece com **frequência**, sobretudo nas situações cotidianas. Entretanto, é importante frisar a necessidade de analisarmos bem a situação pra ver se, de fato, cabe ali raciocínio desse tipo.

Nesta seção, apresentaremos um algoritmo eficiente para resolver problemas envolvendo grandezas proporcionais, também conhecido por **regra de três**. Esses problemas se caracterizam por apresentar diversas informações a respeito de duas ou mais grandezas, sendo que para uma das grandezas apresentadas falta uma informação que deverá ser descoberta a partir das demais. Diremos que a **grandeza de interesse** é a grandeza para a qual falta uma informação, e identificaremos o problema como um **problema de regra de três**, se cada uma das demais grandezas for, de alguma maneira, proporcional à grandeza de interesse.

Uma vez identificado que trata-se de um problema de regra de três, executaremos as seguintes etapas:

1. Construir uma tabela informando todas as grandezas envolvidas no problema. Nesse exemplo genérico, X será a grandeza de interesse e G_1, G_2, $\cdots$ G_n serão as demais grandezas envolvidas no problema.

GRANDEZAS	X	G_1	G_2	$\cdots$	G_n
medida 1				$\cdots$	
medida 2				$\cdots$	

2. Escrever na tabela as medidas informadas no problema para cada grandeza, usando uma letra qualquer para representar a medida que se deseja obter (que será a **variável** do problema), e identificar a grandeza de interesse com uma seta apontada para uma direção qualquer. Nesse exemplo genérico, x_1, a_1, a_2, b_1, b_2, $\cdots$, γ_1, γ_2 são valores conhecidos e y é a variável que se deseja descobrir.

GRANDEZAS	$\uparrow X$	G_1	G_2	$\cdots$	G_n
medida 1	x_1	a_1	b_1	$\cdots$	γ_1
medida 2	y	a_2	b_2	$\cdots$	γ_2

3. Comparar[11] cada uma das outras grandezas com a grandeza de interesse, verificando o tipo de proporcionalidade. Se for direta, identificar a outra grandeza com uma seta apontada na direção da seta que identifica a grandeza de interesse; se for inversa, identificá-la com uma seta na direção oposta à seta que identifica a grandeza de interesse.

GRANDEZAS	$\uparrow X$	$\uparrow G_1$	G_2	$\cdots$	G_n
medida 1	x_1	a_1	b_1	$\cdots$	γ_1
medida 2	y	a_2	b_2	$\cdots$	γ_2

[11] Essa tarefa é mais delicada quando se têm muitas grandezas, pois exige que simplifiquemos o problema a uma situação parecida, na qual apenas duas grandezas variam enquanto todas as outras permanecem fixas.

$$
\begin{array}{lccccc}
\text{GRANDEZAS} & \uparrow X & \uparrow G_1 & \downarrow G_2 & \cdots & G_n \\
\text{medida 1} & x_1 & a_1 & b_1 & \cdots & \gamma_1 \\
\text{medida 2} & y & a_2 & b_2 & \cdots & \gamma_2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lccccc}
\text{GRANDEZAS} & \uparrow X & \uparrow G_1 & \downarrow G_2 & \cdots & \uparrow G_n \\
\text{medida 1} & x_1 & a_1 & b_1 & \cdots & \gamma_1 \\
\text{medida 2} & y & a_2 & b_2 & \cdots & \gamma_2
\end{array}
$$

4. A partir dos elementos da tabela, montar a equação

$$
\underbrace{\frac{x_1}{y}}_{\texttt{refere-se à X}} = \underbrace{\frac{a_1}{a_2}}_{\texttt{refere-se à } G_1} \cdot \underbrace{\frac{b_2}{b_1}}_{\texttt{refere-se à } G_2} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}}_{\texttt{refere-se à } G_n},
$$

   obedecendo ao que chamaremos de **critério de inversão**.

5. Resolva a equação, isolando a variável do problema.

O que chamamos de critério de inversão, na verdade, é uma regra muito simples que consiste em inverter a razão com as medidas da grandeza que tiver sido identificada com uma seta apontada para a direção oposta à seta da variável de interesse.

Executando esse algoritmo, conseguiremos resolver qualquer problema de regra de três!

Exemplo 1.27 (Regra de três simples). Um homem percorre um trajeto de bicicleta. Se, pedalando a velocidade de 5 km/h, ele demora 6 horas, quanto tempo o homem demorará para percorrer esse mesmo trajeto a uma velocidade 3 km/h?

Primeiramente, montemos a tabela com as respectivas medidas informadas pelo problema.

$VELOCIDADE$	$\uparrow TEMPO$
5	6
3	t

Observe que estamos interessados na grandeza tempo. Note também que velocidade e tempo são grandezas inversamente proporcionais, isto é, quanto menor for a velocidade desenvolvida pelo ciclista, maior será o tempo gasto no trajeto. Assim:

$\downarrow VELOCIDADE$	$\uparrow TEMPO$
5	6
3	t

Finalmente, montamos a proporção, obedecendo ao critério de inversão, e efetuamos as contas:

$$\frac{6}{t} = \frac{3}{5} \Rightarrow 3.t = 6.5 \Rightarrow t = \frac{6.5}{3} = 10 \text{ horas.}$$

Problemas como o resolvido no exemplo acima são ditos ser de **regra de três simples** e recebem este nome por envolverem apenas duas grandezas. Quando envolvem mais de duas grandezas, costumam ser chamados de problemas de **regra de três composta**.

Exemplo 1.28 (Regra de três composta). Uma família subsiste da criação de 2 bois, e alimentando-os durante 8 dias, são consumidos 480 gramas de sal mineral. Se mais 2 bois são comprados, qual deverá ser a quantidade de sal mineral para alimentação de todos os animais durante 12 dias?

Primeiramente, montemos a tabela com as respectivas medidas informadas pelo problema.

$BOIS$	$\uparrow GRAMAS$	$TEMPO$
2	480	8
4	x	12

Observe que estamos interessados na grandeza gramas e, para descobrir o valor de x, deveremos verificar a relação de proporcionalidade que cada uma das outras grandezas possui com a grandeza de interesse. Note que, quanto maior a quantidade de animais, maior deverá ser a quantidade de sal mineral para alimentá-los. Logo, as grandezas bois e gramas são diretamente proporcionais.

$$\begin{array}{ccc} \uparrow BOIS & \uparrow GRAMAS & TEMPO \\ 2 & 480 & 8 \\ 4 & x & 12 \end{array}$$

Por outro lado, quanto maior o tempo de alimentação dos animais, maior deverá ser a quantidade de alimento disponível. Logo, as grandezas gramas e tempo também são diretamente proporcionais.

$$\begin{array}{ccc} \uparrow BOIS & \uparrow GRAMAS & \uparrow TEMPO \\ 2 & 480 & 8 \\ 4 & x & 12 \end{array}$$

Finalmente, montamos a proporção e efetuamos as contas. Neste caso, não precisaremos inverter nenhuma das razões.

$$\frac{480}{x} = \frac{2}{4} \cdot \frac{8}{12} \Rightarrow x \cdot 2 \cdot 8 = 480 \cdot 4 \cdot 12 \Rightarrow x = \frac{480 \cdot 4 \cdot 12}{2 \cdot 8} = 1.440 \text{ gramas.}$$

Resumindo as informações dessa seção, vimos, na Subseção 1.3.1, uma interpretação para a razão de dois números pertencentes a um mesmo conjunto, sem nos preocuparmos com o que eles representam. Na Subseção 1.3.3, vimos uma interpretação para essas mesmas razões, mas quando numerador e denominador representam coisas diferentes, isto é, números que medem grandezas diferentes.

Quando lidamos com a razão de dois números que representam medidas de uma mesma grandeza, retornamos, na verdade, à situação abordada na Subseção 1.3.1.

De fato, como sugere o exemplo abaixo,

$$\frac{3 \text{ unidades da grandeza A}}{2 \text{ unidades da grandeza A}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\text{unidade da grandeza A}}{\text{unidade da grandeza A}} = \frac{3}{2}.$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1. Considere o conjunto $M = \{\pi;\ 3,14;\ \{\pi;\ 3,1415\}\}$ e julgue cada item abaixo como C (CERTO) ou E (ERRADO):

   a) ( ) O conjunto M possui 4 elementos.

   b) ( ) O conjunto $N = \{\pi;\ 3,1415\}$ está contido no conjunto M.

   c) ( ) Os elementos do conjunto M são números.

   d) ( ) Os números π; $3,14$ e $3,1415$ são números racionais.

   e) ( ) Os números π; $3,14$ e $3,1415$ são números irracionais.

2. Abaixo, são informados alguns números reais. Classifique cada um deles como R (racional) ou I (irracional).

   a) ( ) $\frac{2}{3}$

   b) ( ) $0,333....$

   c) ( ) $17,17117111711117...$

   d) ( ) $2e$

   e) ( ) $\frac{1}{\pi}$

   f) ( ) $-1,212121...$

   g) ( ) $7,131131131...$

   h) ( ) -1.063

3. Considere os intervalos reais $A = [1,4)$ e $B = [2,5]$. Responda às seguintes questões:

a) Esboce o gráfico do produto cartesiano $A \times B$.

b) O ponto $P = (\pi, \pi)$ pertence a $A \times B$?

c) Dê exemplo de um ponto que está situado na "fronteira" de $A \times B$, mas que não pertença a este produto cartesiano.

d) Dê exemplo de um ponto que está situado na "fronteira" de $A \times B$ e que pertença a este produto cartesiano.

e) Sabemos que, em geral, $A \times B \neq B \times A$. Sendo assim, dê exemplo de um ponto que pertença a $A \times B$ e que não pertença a $B \times A$.

4. Encontre a fração geratriz das seguintes dízimas periódicas:

a) $v = 12,444....$

b) $w = 2,3123123...$

c) $z = -1,00212121...$

5. Em uma escola, 40% dos estudantes gostam de inglês, 60% gostam de espanhol e 10% não gostam de nenhum dos dois idiomas. Qual o percentual de estudantes que gosta apenas de espanhol?

a) 20%

b) 30%

c) 40%

d) 50%

e) 60%

6. (IFB) Num concurso público de nível médio, verificou-se que 60% dos candidatos tinham nível superior, dentre os quais 35% eram homens. Sabendo que 60% dos candidatos eram homens, assinale a única alternativa CORRETA:

a) 1% dos candidatos são mulheres que não possuem curso superior.

b) 21% dos candidatos são mulheres que possuem curso superior.

c) 1% das candidatas mulheres não possuem curso superior.

d) 35% dos candidatos são homens que possuem curso superior.

e) Há mais candidatos homens sem curso superior do que candidatas mulheres com curso superior.

7. (IFG) O valor da expressão numérica

$$\frac{0,001 \times (0,001)^2 \times 100}{0,00001}$$

é

a) 0,01.

b) 0,1.

c) 0,001.

d) 0,0001.

e) 1.

8. (IFG) Dos 350 candidatos que se inscreveram para um processo seletivo, apenas 280 compareceram. Então, pode-se afirmar que o índice percentual de não comparecimento foi de

a) 15%.

b) 18%.

c) 19%.

d) 2%.

e) 20%.

9. (IFB) Comprei um computador por 80% do que ele valia há um mês atrás, e, com isso, economizei R$ 300,00. Assim, esse computador me custou

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

a) R$ 1.500,00.

b) R$ 1.200,00.

c) R$ 1.800,00.

d) R$ 2.100,00.

e) R$ 2.400,00.

10. (IFG) Na compra de uma camisa, obteve-se um desconto de 15%, o que proporcionou uma economia de R$ 6,00. Quanto foi pago pela camisa?

a) R$ 40,00

b) R$ 30,00

c) R$ 35,00

d) R$ 32,00

e) R$ 34,00

11. (IFG) Qual a taxa final de aumento de um produto que sofreu um reajuste de 5% e logo em seguida foi reajustado em 6% sobre o valor anterior?

a) 11%

b) 12%

c) $11,5\%$

d) $11,3\%$

e) $12,5\%$

12. (IFG) Um livro que custava R$ 70,00 foi vendido por R$ 56,00. Qual foi a taxa percentual de desconto?

a) 10%

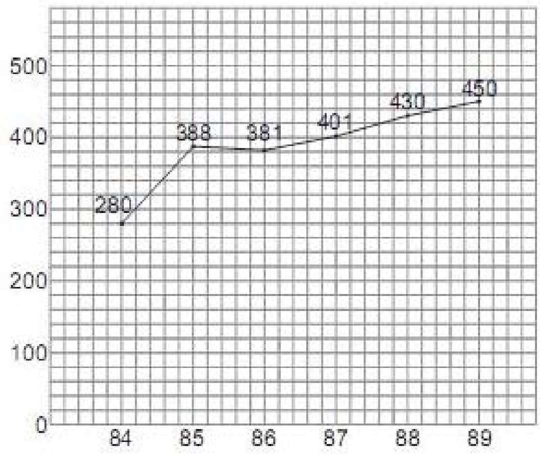
b) 15%

c) 20%

d) 25%

e) 17%

13. (IFB) O gráfico abaixo representa a evolução do patrimônio de uma empresa, entre 1984 e 1989.



No eixo horizontal, estão marcados os anos em que foram realizados os balanços. No eixo vertical, estão assinalados os valores (em milhares de reais) do patrimônio. Com base no gráfico, é CORRETO afirmar

a) que, comparado com o início do período observado, a empresa apresentou um aumento do patrimônio superior a 60%.

b) que, de 85 para 86, houve uma queda de 2% no patrimônio dessa empresa.

c) que o crescimento percentual no patrimônio observado entre os anos 86 e 87 foi igual ao observado entre os anos 88 e 89.

d) que, comparado com o ano anterior, o maior crescimento do patrimônio da empresa se deu em 89.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

e) que o patrimônio da empresa apresentou desempenho crescente no período observado.

14. (IFB) Uma loja revende produtos importados. O preço de venda dos seus produtos é estabelecido considerando uma margem de lucro de 20% sobre o preço da venda. Assim, o lucro gerado por um produto importado a um valor correspondente a R$7.000,00 e revendido nessa loja será de

    a) R$ 1.750,00.

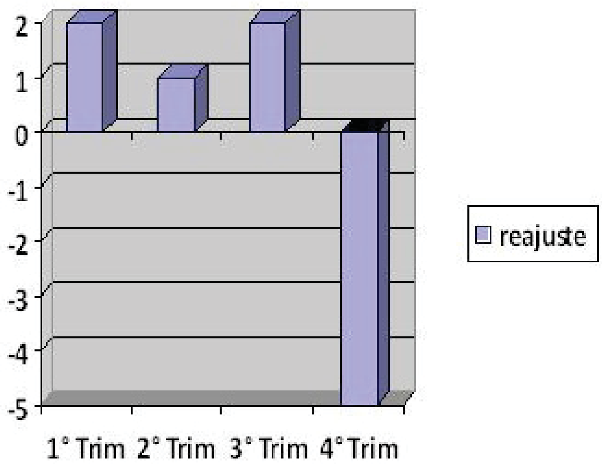
    b) R$ 1.400,00.

    c) R$ 1.500,00.

    d) R$ 1.650,00.

    e) R$ 1.900,00.

15. (IFB) O preço de uma mercadoria foi submetido sucessivamente as seguintes variações percentuais de preço durante o ano passado:



Com base nessas informações, é correto afirmar que:

a) Ao final do ano passado, o preço da mercadoria apresentava um desconto inferior a $0,2\%$, comparado com o preço da mercadoria no início do ano.

b) Ao final do ano passado, o valor da mercadoria era o mesmo apresentado no início daquele ano.

c) Ao final do ano passado, o valor da mercadoria estava 1% maior do que no início daquele ano.

d) Ao final do ano passado, o valor da mercadoria estava $0,1\%$ maior do que no início daquele ano.

e) Ao final do ano passado, o valor da mercadoria estava 1% menor do que no início daquele ano.

16. (IFB) Considere que uma pessoa tenha recebido R$ 10.000,00 de um prêmio da loteria e tenha usado 20% desse prêmio para pagar uma dívida. Além disso, gastou 25% do que restou com uma festa. Que quantia sobrou do prêmio?

a) R$ 2.000,00

b) R$ 3.000,00

c) R$ 4.000,00

d) R$ 5.000,00

e) R$ 6.000,00

17. (IFB) Uma loja oferecia suas mercadorias em dois planos de pagamento:

PLANO 1: a vista, com desconto de 5%.

PLANO 2: em duas parcelas iguais, sendo uma entrada e a outra a ser paga em 30 dias.

Considerando esta situação, é correto afirmar que

a) a taxa de juros mensal da loja é superior a 10%.

b) a taxa de juros mensal da loja é de 5%.

c) a taxa de juros mensal da loja é de 10%.

d) a taxa de juros mensal da loja é inferior a 5%.

e) a taxa de juros mensal da loja é maior do que 5% e menor do que 10%.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

18. (IFB) Há algum tempo, um investidor comprou um apartameto em Brasília e hoje deseja revendê-lo. O possível comprador dispõe de k reais para a entrada, quantia essa que é 20% menor do que o valor gasto pelo investidor à época da compra do imóvel. Se o investidor deseja ter um lucro de pelo menos 140% sobre o valor que gastou para adquirir o imóvel, qual deve ser o preço mínimo de venda?

    a) $3k$ reais.

    b) $4k$ reais.

    c) $2k$ reais.

    d) $1,75k$ reais.

    e) $1,92k$ reais.

19. (IFB) O texto abaixo foi retirado do site oficial do IBGE, e trata da produtividade de alguns produtos agrícolas estimada para 2010 comparada com o ano anterior.

    "Nesta primeira avaliação da safra nacional dos cereais, leguminosas e oleaginosas para 2010, estima-se uma produção de 143,4 milhões de toneladas, superior $7,2\%$ à obtida no ano passado. A área a ser colhida será de maior $2,1\%$ que a da safra de 2009, que foi de 47,2 milhões de hectares." (IBGE, com adaptações).

    Com base nestas informações, estima-se que

    a) a produtividade de 2010 superá a produtividade de 2009 em um percentual que está entre 0% e 5%.

    b) a produtividade de 2009 superá a produtividade de 2010 em um percentual que está entre 5% e 10%.

    c) a produtividade de 2010 superará a produtividade de 2009 em um percentual que está entre 10% e 15%.

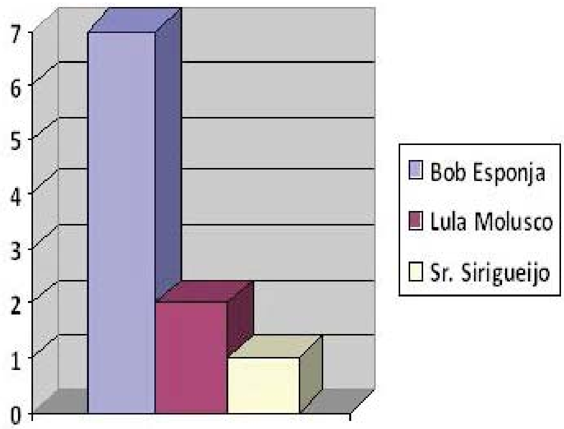
d) a produtividade de 2009 superá a produtividade de 2010 em um percentual que está entre 10% e 15%.

e) a produtividade de 2010 superará a produtividade de 2009 em um percentual que está entre 5% e 10%.

20. (IFB) Até o mês passado, o preço de venda de um produto era calculado a partir do seu custo de fabricação, acrescido de uma margem de lucro de 20%. Neste mês, o custo de fabricação do produto reduziu-se em 10% e o administrador resolveu aplicar um reajuste de 10% sobre o preço de venda desse produto. Essa medida fez com que, neste mês,

   a) o preço de venda do produto diminuisse 1%.
   b) o preço de venda do produto aumentasse 1%.
   c) o preço de venda do produto permanesse o mesmo.
   d) a margem de lucro sobre o produto permanecesse a mesma.
   e) a margem de lucro sobre o produto dobrasse.

21. (IFB) Uma pesquisa com 400 crianças mostrou a preferência delas por três personagens de desenho animado. O resultado foi o seguinte:



Então é CORRETO afirmar que:

a) 210 crianças preferem o Bob Esponja.
b) apenas 70 crianças preferem o Bob Esponja.
c) as crianças preferem o Sr. Sirigueijo ao Lula Molusco.
d) 280 crianças preferem o Bob Esponja.
e) apenas 40 crianças preferem o Lula Molusco.

22. (IFB) Se 10 homens constroem um muro em 10h, quantos homens são necessários para construir o mesmo muro em 5h?

a) 5
b) 10
c) 15
d) 20
e) 30

23. (IFB) Um funcionário público do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Brasília, viajando de carro a uma velocidade média de 80 km/h, gastou meia hora para se deslocar do *campus* Plano Piloto ao *campus* Planaltina. Na volta, no entanto, gastou 25 minutos. Assim, a velocidade média desenvolvida pelo carro do funcionário na volta do percurso foi de

a) 96 km/h.
b) 66,6 km/h.
c) 85 km/h.
d) 90 km/h.
e) 100 km/h.

24. (EPCAr) Um trem com a velocidade de 45 km/h, percorre certa distância em três horas e meia. Nas mesmas condições e com a velocidade de 60 km/h, quanto tempo gastará para percorrer a mesma distância?

a) 2h30min18s

b) 2h37min8s

c) 2h37min30s

d) 2h30min30s

e) 2h29min28s

25. Em 6 dias de trabalho, 12 confeiteiros fazem 960 tortas. Em quantos dias 4 confeiteiros poderão fazer 320 tortas?

26. Em 6 dias, 6 galinhas botam 6 ovos. Quantos ovos botam 12 galinhas em 12 dias?

27. (IFB) Os nutricionistas que trabalham no restaurante do *campus* Planaltina informaram que os 320 comensais usuários do restaurante consomem 1.440 litros de leite a cada 18 dias. No entanto, eles estão preocupados com o aumento de comensais previsto para o próximo semestre, que passará a ser de 400, enquanto que a previsão no fornecimento de leite será de 1.500 litros para o mesmo periodo. Considerando essa nova situação, é correto afirmar que:

    a) havendo um aumento proporcional do consumo, o suprimento de leite será suficiente para 15 dias.

    b) não há razão para preocupação, uma vez que o suprimento de leite aumentou proporcionalmente ao número de comensais.

    c) havendo um aumento proporcional do consumo, o suprimento de leite será suficiente para, no máximo, 14 dias.

    d) havendo um aumento proporcional do consumo, o suprimento de leite será suficiente para, pelo menos, 21 dias.

    e) havendo um aumento proporcional do consumo, o suprimento de leite será suficiente para 16 dias.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

28. (IFB)Uma empresa de refrigerantes gasta R$ 2.000,00 em propaganda mensalmente. A tabela a seguir simula os gastos (em reais) dessa empresa em determinado mês em função da produção de refrigerantes (em litros).

Produção (em litros)	Custo de produção (em reais)
0	2.000
500	2.100
1.000	2.200
1.500	2.300
2.000	2.400

Com base nesses dados, é CORRETO afirmar

a) que, ao se produzir 2.000 litros de refrigerante, o custo do litro é inferior a R$ 1,00.
b) que o custo total de fabricação é diretamente proporcional à quantidade de refrigerante produzida.
c) que o custo total de fabricação é inversamente proporcional à quantidade de refrigerante produzida.
d) que, ao se produzir 1.000 litros de refrigerante, o custo do litro é inferior a R$ 2,00.
e) que R$ 2.000,00 representa um custo fixo de produção.

29. (IFB) Se duas torneiras enchem um tanque em 40 minutos, para encher o mesmo tanque em 16 minutos, são necessárias

a) 5 torneiras.
b) 6 torneiras.
c) 8 torneiras.
d) 10 torneiras.
e) 12 torneiras.

30. (IFB) Sabendo-se que dois padeiros produzem 20 kg de pão em duas horas, é correto afirmar que, para se produzir os mesmos 20 kg de pão em 20 minutos, são necessários

a) 6 padeiros.

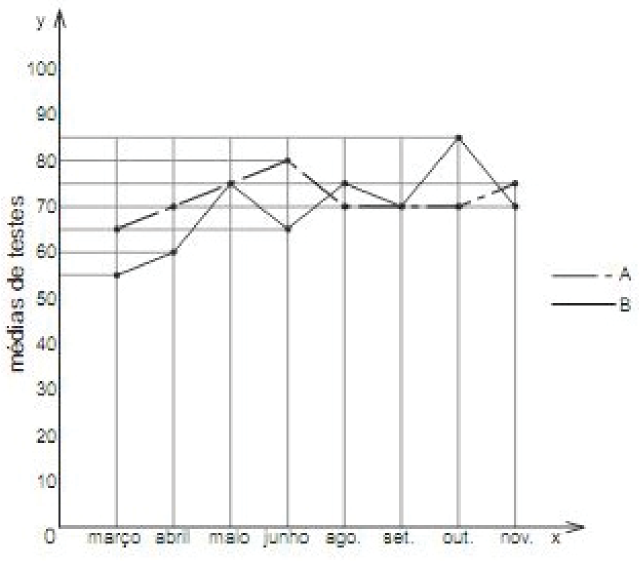
b) 8 padeiros.

c) 10 padeiros.

d) 12 padeiros.

e) 14 padeiros.

31. (IFB) O gráfico abaixo mostra o perfil de desempenho das turmas A e B em Matemática, no ano passado.



Com base no gráfico, marque a única opção CORRETA.

a) Nos meses de maio e setembro, ambas as turmas apresentaram o mesmo desempenho.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

b) No mês de maio, a turma A demonstrou melhor desempenho do que a turma B.

c) Comparado ao mês de abril, o desempenho da turma A cresceu mais do que o desempenho da turma B no mês de maio.

d) A turma B apresentou desempenho mais equilibrado do que a turma A ao longo do ano.

e) Comparado ao mês de março, o desempenho da turma A cresceu mais do que o desempenho da turma B no mês de abril.

2. Função

As funções constituem objeto fundamental do cálculo. Lidamos com funções em situações desde as cotidianas até as mais complexas. Se vamos ao supermercado fazer compras, o valor da conta estará em função da quantidade de produtos que comprarmos; a área de um círculo é função do seu raio; o montante de uma dívida contraída em um banco é função do tempo decorrido após o contrato de empréstimo.

Intuitivamente, o conceito de função surge quando analisamos a relação que existe entre duas grandezas. Sempre que uma grandeza depende de outra e for possível determinar uma a partir da outra, dizemos ter ali uma função que relaciona uma grandeza à outra, ou simplesmente que uma grandeza é função da outra.

Definição 2.1. Dados dois conjuntos não vazios A e B, chamamos de **relação** de A em B a qualquer subconjunto do produto cartesiano $A \times B$. O conjunto A é dito ser o domínio da relação e o conjunto B o contradomínio da relação.

Nem toda relação entre conjuntos que expressam medidas de duas grandezas distintas é considerada uma função.

Exemplo 2.1. Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4\}$ dois conjuntos que expressam as medidas assumidas por duas grandezas. Temos que o conjunto $A \times B$ é dado por

$$A \times B = \{(1,\,3),\,(1,\,4),\,(2,\,3),\,(2,\,4),\,(3,\,3),\,(3,\,4)\}.$$

Poderíamos considerar diversas relações de domínio A e contradomínio B. Em particular, a relação $R \subset A \times B$, dada por

$$R = \{(1,\,3),\,(1,\,4),\,(2,\,4),\,(3,\,4)\},$$

é tal que quando a primeira grandeza assume o valor 1, o valor que a segunda grandeza assume não estará definido, podendo ser 3 ou 4. Esta relação não será considerada uma função.

A próxima definição nos apresenta o conceito formal de função.

Definição 2.2. Uma função f de domínio A e contradomínio B é uma relação de $A \times B$ tal que para qualquer $x \in A$ existe um único $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.

Para cada $(x, y) \in f$ na Definição 2.2, a ordenada y é também denotada por $f(x)$, e dita ser *a imagem do elemento x através da f*. O subconjunto de B formado por todos esses elementos é dito ser o Conjunto Imagem da função f, isto é, o conjunto

$$Im(f) := \{y = f(x);\, x \in A\}$$

é o conjunto Imagem da função f.

Usaremos a seguinte notação para representar funções:

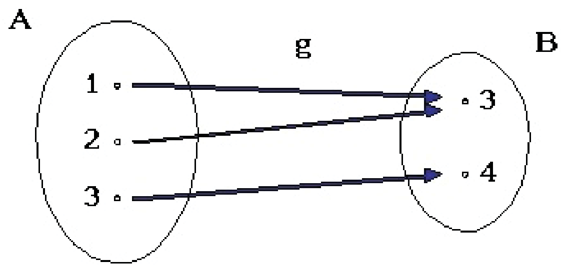
$$\begin{array}{rccl} f: & A & \longrightarrow & B \\ & x & \longmapsto & y = f(x). \end{array}$$

Nela, o x representa um valor arbitrário do domínio e é chamado de **variável independente**. O $f(x)$ representa um valor a ser determinado a partir do valor de x e é chamado, por essa razão, de **variável dependente**.

Exemplo 2.2. Considere A e B como no Exemplo 2.1. O conjunto $g \subset A \times B$, dado por

$$g = \{(1,\, 3),\, (2,\, 3),\, (3,\, 4)\},$$

é uma função de A em B. Temos que $g(1) = 3$, $g(2) = 3$ e $g(3) = 4$. Logo, o conjunto $Im(g) = \{3,\, 4\}$. Podemos representar essa função pelo diagrama de flechas abaixo



Existem várias maneiras de se representar uma função: por meio de diagramas ou tabelas, por uma descrição verbal ou analítica do seu comportamento ou por gráficos.

Dada uma função f de domínio A, dizemos que o seu **gráfico** é a representação geométrica do conjunto de pontos

$$\{(x,\, f(x));\, x \in A\}$$

num sistema de eixos coordenados. O exemplo abaixo apresenta uma mesma função representada de variadas maneiras.

Exemplo 2.3. Num determinado horário, uma empresa de táxi cobra, por corrida, uma bandeirada, no valor de R$ 4,00, mais R$ 0,50 por cada duzentos metros rodados. Assim, o valor da corrida está em função da distância percorrida. Abaixo, a tabela apresenta o custo da corrida dependendo do tamanho do percurso desenvolvido.

Tabela 2.1: Preço da corrida em função da distância percorrida.

distância percorrida (km)	preço da corrida (R$)
$(0,\ 0,2]$	4,50
$(0,2,\ 0,4]$	5,00
$(0,4,\ 0,6]$	5,50
$(0,6,\ 0,8]$	6,00
$(0,8,\ 1,0]$	6,50
$\vdots$	$\vdots$

Alternativamente, se para cada percurso de x quilômetros chamarmos de $c(x)$ o custo da corrida, podemos representar analiticamente esta situação pela função

$$\begin{array}{rccl} c: & (0,\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & c(x) = \begin{cases} 4,5, & se\ 0 < x \leq 0,2 \\ 5,0, & se\ 0,2 < x \leq 0,4 \\ 5,5, & se\ 0,4 < x \leq 0,6 \\ 6,0, & se\ 0,6 < x \leq 0,8 \\ 6,5, & se\ 0,8 < x \leq 1,0 \\ \vdots & \vdots \end{cases} \end{array}$$

Finalmente, essa situação pode ser apresentada sob forma de um gráfico, como mostra a Figura 2.1.

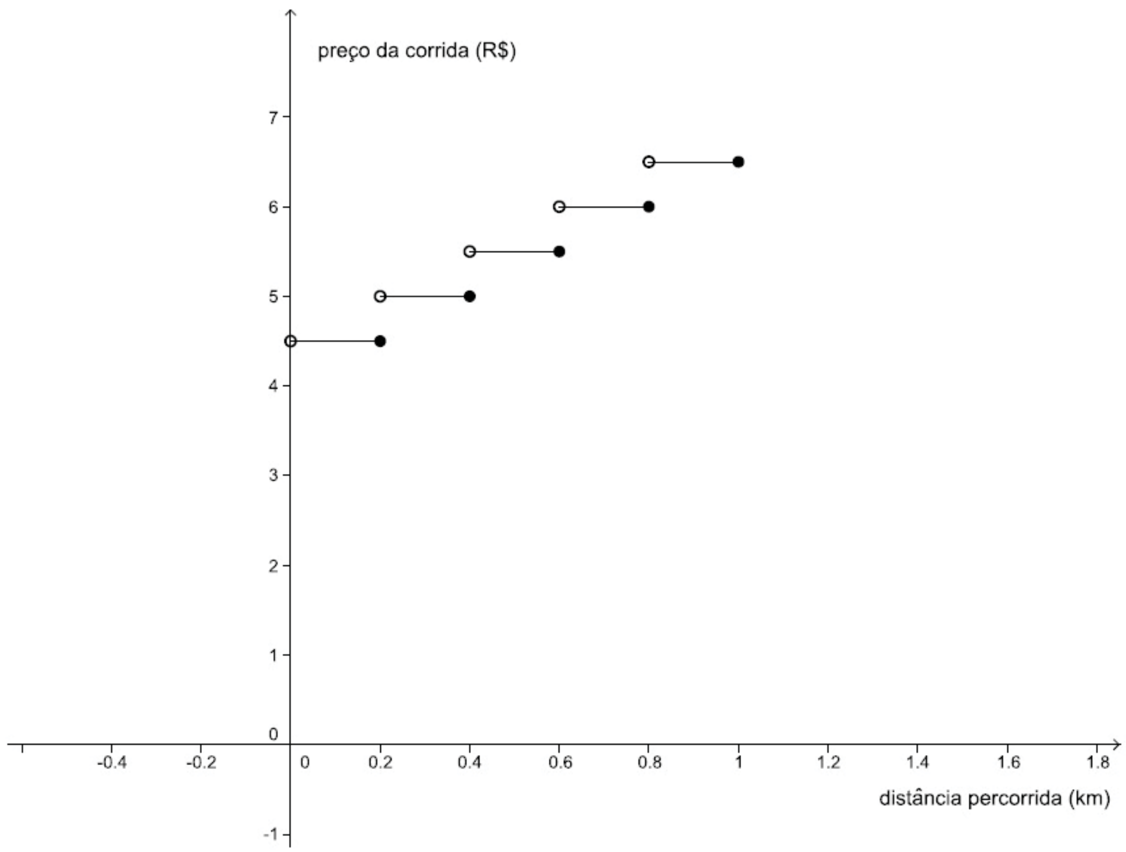


Figura 2.1: Preço da corrida em função da distância percorrida.

Neste texto, estamos particularmente interessados em funções cujo domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}$. Quando este subconjunto não for explicitado, assumiremos que o domínio é toda a reta real.

2.1 Crescimento e decrescimento

Seja

$$\begin{array}{rccc} f: & A \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & B \subset \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

uma função qualquer. Dizemos que f é **crescente** quando, dados x_1, $x_2 \in A$ tais que $x_1 > x_2$, tivermos $f(x_1) > f(x_2)$. Caso, ao contrário, $x_1 > x_2$ implique em $f(x_1) < f(x_2)$ quaisquer que sejam x_1, $x_2 \in A$, diremos, então, que f é **descrescente**.

Na prática, poucas funções apresentam tal comportamento, seja crescente ou decrescente. A maioria das funções apresentam intervalos onde crescem ou decrescem. Em particular, a função apresentada no Exemplo 2.3 não é crescente, nem decrescente. Além disso, ela não apresenta intervalos de crescimento nem intervalos de decrescimento. Na verdade, ela cresce por meio de saltos.

Exemplo 2.4 (A reta). Uma função g cuja lei de formação é da forma

$$g(x) = ax + b,$$

onde a e b são parâmetros reais quaisquer, gera um gráfico que é uma reta. Quando $a > 0$, a reta é uma função crescente; quando $a < 0$, a reta é uma função decrescente; quando $a = 0$, a reta é uma função constante. O parâmetro a, responsável pela inclinação da reta, é chamado de **coeficiente angular**[1], e o parâmetro b é conhecido por **coeficiente linear**.

Exemplo 2.5 (A parábola). Uma função h cuja lei de formação é da forma

$$h(x) = ax^2 + bx + c,$$

onde $a \neq 0$, b e c são parâmetros reais quaisquer, gera um gráfico que é uma parábola. Quando $a > 0$, a função decresce no intervalo $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ e cresce no intervalo $[-\frac{b}{2a}, \infty)$, o que faz com que a parábola tenha concavidade voltada para cima; quando $a < 0$, a função cresce no intervalo $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ e decresce no intervalo

[1]Um aspecto importante a se observar é sobre a posição relativa de retas: retas paralelas apresentam a mesma inclinação e, portanto, o mesmo coeficiente angular. Se os coefientes angulares de duas retas forem distintos então elas terão inclinações distintas e, consequentemente, serão concorrentes. Em particular, duas retas serão perpendiculares quando o produto dos seus coefientes angulares for igual a -1, e isso é uma consequência da geometria que estas retas apresentam quando plotadas no plano cartesiano.

$\left[-\frac{b}{2a}\right., \infty)$, o que faz com que a parábola tenha concavidade voltada para baixo.

No Exemplo 2.5, o valor $x_v := -\frac{b}{2a}$ é dito ser um **ponto crítico** do domínio de h, pois divide o domínio em regiões onde h cresce e decresce. A imagem de x_v por h, isto é, $y_v := h\left(-\frac{b}{2a}\right)$, é dito ser um **valor crítico** de h, pois constitue-se num valor de máximo ou de mínimo do conjunto $Im(h)$. O ponto (x_v, y_v), neste caso, constitue-se no vértice da parábola.

2.2 Máximos e mínimos

Considere uma função real f tomando valores no conjunto dos números reais. Chamaremos de **vizinhança** de $a \in \mathbb{R}$ e representaremos por V_a a qualquer intervalo aberto contendo a.

Definição 2.3. Um ponto $(x, f(x))$ é dito ser um ponto crítico de f se existe uma vizinhança V_x tal que

$$f(y) > f(x), \forall y \in V_x, y \neq x$$

ou

$$f(y) < f(x), \forall y \in V_x, y \neq x.$$

No primeiro caso, dizemos que $(x, f(x))$ é um ponto de mínimo local de f. No segundo caso, dizemos que $(x, f(x))$ é um ponto de máximo local de f. Em particular, se $V_x = \mathbb{R}$, dizemos que $(x, f(x))$ é ponto de mínimo ou ponto de máximo, respectivamente.

O exemplo 2.5 apresenta o ponto $(x_v, h(x_v)) = \left(-\frac{b}{2a}, h\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ como sendo um ponto crítico da parábola. As proposições 2.1 e 2.2 abaixo mostram que, de fato, é este o ponto de mínimo ou máximo de uma função quadrática.

Proposição 2.1. *Se $a > 0$, o ponto $(-\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a}))$ é ponto de mínimo da função quadrática f, dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde b e c são parâmetros reais.*

Demonstração: Primeiramente, observe que $f(-\frac{b}{2a}) = c - \frac{b^2}{4a}$. Precisamos mostrar que $f(x) > f(-\frac{b}{2a})$, para qualquer número real $x \neq -\frac{b}{2a}$. De fato,

$$
\begin{aligned}
x \neq -\tfrac{b}{2a} \quad &\Leftrightarrow \quad x + \tfrac{b}{2a} \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (x + \tfrac{b}{2a})^2 \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (\tfrac{2ax+b}{2a})^2 > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 4a^2 + 4axb + b^2 > 0 \\
&\overset{(a>0)}{\Leftrightarrow} \quad ax^2 + bx + \tfrac{b^2}{4a} > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad ax^2 + bx + \tfrac{b^2}{4a} + c > c \\
&\Leftrightarrow \quad ax^2 + bx + c > c - \tfrac{b^2}{4a} \\
&\Leftrightarrow \quad f(x) = f(-\tfrac{b}{2a}).
\end{aligned}
$$

♦

De modo inteiramente análogo, prova-se a proposição abaixo.

Proposição 2.2. *Se $a < 0$, o ponto $(-\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a}))$ é ponto de máximo da função quadrádica f, dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde b e c são parâmetros reais.*

2.3 Simetrias

Muitas funções possuem gráficos cuja geometria facilita a sua compreensão. Algumas delas apresentam simetrias em relação a retas ou pontos do plano cartesiano que são facilmente perceptíveis. Em particular, diremos que uma função é **par** quando apresenta simetria em relação ao eixo coordenado dos y, isto é, em relação à reta $y : x = 0$. Diremos que uma função é ímpar quando apresenta simetria em relação à origem do plano cartesiano, isto é, em relação ao ponto $(0, 0)$. Formalmente, temos a seguinte definição:

Definição 2.4. Seja f uma função qualquer. Se

$$f(x) = f(-x), \forall\, x,$$

então, f é uma função par. Se

$$f(-x) = -f(x), \forall\, x,$$

então, f é dita ser uma função ímpar.

Exemplo 2.6. Retornando ao Exemplo 2.4, vemos que a função g será ímpar se o coeficiente b for nulo, e será par se o coeficiente a for nulo. De fato, se $b = 0$, então

$$g(x) = ax = -a(-x) = -g(-x).$$

Logo, sob esta condição, g é ímpar. Se $a = 0$, então,

$$g(x) = b = g(-x),$$

logo, sob esta condição, g é par.

Exemplo 2.7. Retornando ao Exemplo 2.5, vemos que a função h será par sempre que o coeficiente b for nulo. De fato, se $b = 0$, então,

$$h(x) = ax^2 + c = a(-x)^2 + c = h(-x).$$

Logo, sob essa condição, h é par.

Graficamente, percebemos que uma função é par se o seu gráfico se refletir como se o eixo y fosse um espelho, e percebemos que uma função é ímpar se a origem funciona como um espelho, gerando uma imagem refletida.

2.3.1 Invertibilidade

Nesta seção, estamos particularmente interessados na maneira com que as funções relacionam os elementos do seu domínio com os elementos do seu contradomínio. Para isso, seja $f : A \longrightarrow B$ uma função qualquer.

Definição 2.5. A função f é dita ser **injetiva** se associa a dois diferentes elementos do domínio duas diferentes imagens, isto é, se para quaisquer $x_1,\, x_2 \in A$ tais que

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Definição 2.6. A função f é dita ser **sobrejetiva** se o seu contradomínio coincide com o conjunto imagem, isto é, se

$$B = Im(f).$$

Em particular, dizemos que uma função é **bijetiva** se ela for injetiva e sobrejetiva.

Exemplo 2.8. A função g, definida no Exemplo 2.2, é sobrejetiva, mas não é injetiva.

Exemplo 2.9. A função h, definida no Exemplo 2.5, não é injetiva. Se considerarmos o seu contradomínio o conjunto $\mathbb{R}$, então ela também não será sobrejetiva. Se, ao invés disso, considerarmos como o seu contradomínio o intervalo $[0, \infty)$, ela será sobrejetiva.

Se f é uma função bijetiva, então, ela possui a característica especial de satisfazer a definição de função mesmo quando invertemos o domínio e contradomínio. A fim de compreender melhor essa situação, acompanhe o exemplo seguinte.

Exemplo 2.10. Sejam $M = \{1, 2, 3\}$ e $N = \{3, 4, 5\}$. Digamos que h seja uma função de M em N tal que

$$h(1) = 4,\ h(2) = 5 \text{ e } h(3) = 3.$$

Claramente, h é bijetiva. Dizemos que h^{-1}, definida de N em M por

$$h^{-1}(4) = 1,\ h^{-1}(5) = 2 \text{ e } h^{-1}(3) = 3,$$

é a função **inversa** de h por fazer exatamente o inverso do que a função h faz.

O Exemplo 2.10 mostra em que situação faz sentido falar da inversa de uma dada função. Note que, compreendendo a função h como o conjunto de pontos que define o seu gráfico, isto é,

$$h = \{(1, 4), (2, 5), (3, 3)\},$$

então a função h^{-1} é

$$h^{-1} = \{(4, 1), (5, 2), (3, 3)\}.$$

Isso sugere que, em situações mais gerais, para se determinar a inversa de uma função basta inverter as abscissas e ordenadas dos pontos que constituem o seu gráfico. Essa reflexão nos permite elaborar uma regra prática para visualizar o gráfico da inversa de uma função, quando ela existe:

o gráfico de f^{-1} é obtido refletindo-se o gráfico de f em torno da reta $y = x$.

Essa situação é ilustrada na figura a seguir.

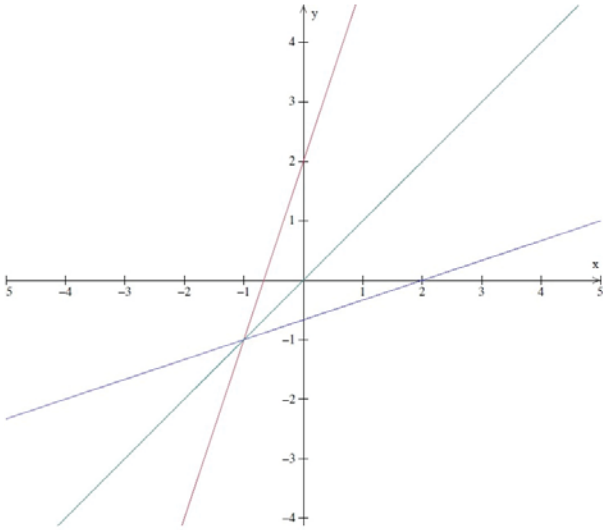


Figura 2.2: Gráficos simultâneos das funções $g(x) = 3x+2$, $y = x$ e $g^{-1}(x) = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$.

2.4 Equações

Quando o relacionamento entre duas grandezas pode ser modelado por meio de uma função f, é comum o interesse nos pontos extremos ou críticos dessa relação.

No Exemplo 2.5, vimos que a solução da equação

$$h(x) = y_v$$

é o valor $x_v = -\frac{b}{2a}$. Dizemos, por isso, que o ponto $(x_v,\, y_v)$ está no nível máximo de h.

Entretanto, outros níveis podem ser de interesse. Descobrir os pontos que pertencem a um nível b de uma função f pressupõe resolver a equação

$$f(x) = b$$

e, consequentemente, o conjunto $\{(x,\, b);\ f(x) = b\}$ é o nível procurado.

É particularmente útil conhecer o nível zero de uma função, isto é, o conjunto

$$\{(x,\, 0);\; f(x) = 0\}.$$

A abscissa de cada ponto pertencente a esse nível é também conhecida como uma **raiz** de f.

As raizes são importantes para se realizar o estudo de sinal da função, isto é, localizar as regiões do domínio onde as imagens de elementos nestas regiões assumem valores positivos ou negativos.

Exemplo 2.11. O parábola da Figura 2.3 apresenta o comportamento da função polinomial $t(x) = -(x-2)(x+1)$. O nível zero de t é conjunto $\{(-1,\, 0),\, (2,\, 0)\}$. Logo, -1 e 2 são as raízes de t.

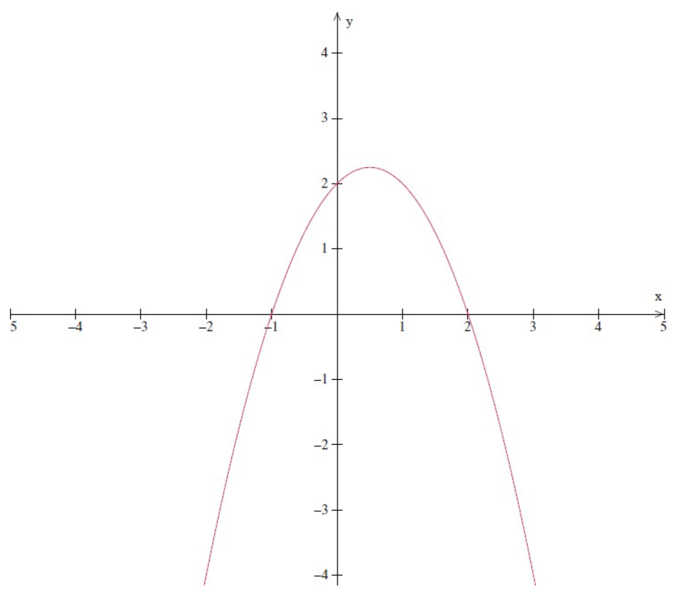


Figura 2.3: Gráfico da função $t(x) = -(x-2)(x+1)$.

Observe que

$$t(x) > 0,\;\; \forall\; x \in (-1,\, 2),$$

e que

$$t(x) < 0, \ \forall\, x \in (-\infty,\, -1) \cup (2,\, \infty).$$

Dizemos, assim, que t é **positiva** no intervalo $(-1,\, 2)$ e **negativa** no conjunto $(-\infty,\, -1) \cup (2,\, \infty)$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1. Uma caixa sem tampa deve ser construída de um pedaço retangular de papelão com dimensões 30 por 20 polegadas. Deve-se cortar quadrados de lados x de cada canto e, depois, dobrar, o que dará o formato da caixa.

   a) Expresse o volume V da caixa como uma função de x.

   b) Determine o domínio da função V.

   c) Calcule $V(5)$.

   d) A função V é crescente? Justifique.

2. Considere a função $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $h(x) = 2x + 1$.

   a) Calcule $h(0)$ e $h(1)$.

   b) Plote no plano cartesiano os pontos $(0, h(0))$ e $(1, h(1))$. Trace a reta que passa por estes pontos, obtendo o gráfico de h.

   c) Esboce o gráfico da função $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 2x + 1$.

   d) Esboce o gráfico da função $f : [0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 2x + 1$.

3. Determine o domímio das funções:

   a) $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + x - 6}$;

   b) $h(x) = \sqrt{x^2 - 6x}$.

4. (IFB) O custo de fabricação de um dado produto produzido numa microempresa é de R$ 30,00 a unidade. Se o preço de revenda desse produto for x, estima-se que $300 - 2x$ produtos serão revendidos por mês. Assim,

   a) o lucro mensal máximo será obtido com a revenda do produto ao preço de R$ 90,00.

   b) o lucro mensal máximo obtido com a revenda do produto será de R$ 7.500,00.

   c) quanto maior o valor de revenda do produto maior será o lucro obtido.

   d) o lucro mensal máximo será obtido com a revenda do produto ao preço de R$ 95,00.

   e) ao revender o produto ao preço de R$ 120,00 a unidade a microempresa terá prejuízo.

5. As equações abaixo definem lugares geométricos que são retas. Determine a inclinação e o coefiente linear de cada uma delas.

   a) $7y + 12x - 2 = 0$

   b) $-4y + 2x + 8 = 0$

   c) $12x = 6y + 4$

6. Encontre a equação da reta que passa pelos pontos dados.

   a) $(0, 0)$ e $(0, 1)$

   b) $(0, 2)$ e $(2, 3)$

   c) $(-2, 1)$ e $(2, 3)$

7. Encontre a equação da reta que contém o ponto $(2, 1)$ e é perpendicular à reta $y = 5x - 3$.

8. Encontre a equação das retas que contêm o ponto $(1, 5)$ e são, respectivamente, paralela e perpendicular à reta $y + 4x = 7$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

9. Verifique a posição relativa entre as retas abaixo:

   a) $r : y = 3x + 2$ e $s : y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$;

   b) $r : y = 3x + 2$ e $s : \frac{1}{3}y = x - \frac{2}{3}$;

   c) $r : y - 2x + 1 = 0$ e $s : 2x + 2y - 1 = 0$.

10. Encontre os pontos de interseção entre as retas r e s do exercício anterior, nos casos onde elas concorrem.

11. A equação $x^2 + 4x + 8y + 12 = 0$ define no plano cartesiano uma parábola. Determine as coordenadas do seu vértice.

12. A função $f(x) = x^2 + x - 6$ descreve uma parábola no plano cartesiano. Determine suas raízes, caso existam, e as coordenadas do seu vértice. Esboce o gráfico de f.

13. Esboce o gráfico da função $g(x) = (1 + x) \cdot (x - 3)$. No gráfico, deve constar interseção com os eixos coordenados e ponto crítico.

14. Um fazendeiro tem 100 metros de cerca para construir um galinheiro retangular. Seja x o comprimento de um lado do galinheiro.

   a) Determine uma expressão para a área $A(x)$, a área do galinheiro em função da medida do lado x.

   b) Encontre a maior área cercada possível e as medidas dos lados que otimizam a área.

15. Considere a função real, a valores reais, definida por

$$g(x) = (2 - x) \cdot (x + 3).$$

   a) Assinale o tipo de gráfico gerado por g:

   ( ) reta

( ) parábola

( ) modular

( ) cúbica

( ) hipérbole

b) Resolva a equação

$$g(x) = 0.$$

c) Esboce o gráfico de g.

d) Esboce o gráfico da função $h(x) = |g(x)|$.

16. Considere a função de domínio real

$$h(x) = (x - 3) \cdot (2 - x)$$

e julgue os seguintes itens em C (CERTO) ou E (ERRADO).

a) ( ) O gráfico de h é uma parábola com concavidade voltada para baixo.

b) ( ) -3 e 2 são as raízes de h.

c) ( ) O ponto crítico de h é um ponto de mínimo.

d) ( ) O conjunto imagem de h é o intervalo $[\frac{1}{2}, +\infty)$.

17. Considere as funções

$$f(x) = 2x - 3 + x^2$$

e

$$g(x) = (1 - x) \cdot (x + 3).$$

Sobre elas, julgue C (CERTO) ou E (ERRADO) cada um dos itens abaixo.

a) ( ) Os gráficos de f e g são retas decrescentes.

b) ( ) Os gráficos de f e g são parábolas com concavidade voltadas para baixo.

c) ( ) Os gráficos de f e g não possuem pontos em comum.

d) ( ) A inequação $f(x) \geq g(x)$ é válida para todo $x \in [-3, 1]$.

e) ( ) Existem infinitos valores de x que satisfazem a equação $g(x) = f(x)$.

18. (IFB) Considere a função real

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & ax^2 + bx + c \end{array},$$

e as seguintes afirmações:

1. A função f decresce no intervalo $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ e cresce no intervalo $(-\frac{b}{2a}, \infty]$;
2. O ponto $(-\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a}))$ é ponto de mínimo da função f;
3. A função f não é par nem é ímpar; e
4. A função f possui duas raízes reais e distintas.

Considerando que a, b e c são coeficientes reais quaisquer, sendo $a \neq 0$, então

a) nenhuma das afirmações está correta.

b) apenas as afirmações 1 e 2 estão corretas.

c) todas as afirmações estão corretas.

d) apenas as afirmações 3 e 4 estão corretas.

e) apenas a afirmação 3 está correta.

19. Para cada uma das funções f abaixo, determine a quantidade $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, onde h é um incremento qualquer no valor de x.

a) $f(x) = 2x - 7$.

b) $f(x) = x^2 - 6x + 3$.

2.5 Classificação das funções

Em geral, quando lidamos com uma função, estamos interessados em captar o seu comportamento global, isto é, em visualizar o seu gráfico. Se o gráfico tiver boas propriedades, as situações que puderem ser modeladas a partir daquela função poderão ter previsões importantes, respeitadas as limitações do modelo.

Esboçar gráficos de funções não é algo simples e a idéia é desenvolvermos ferramentas matemáticas que nos auxiliem nessa tarefa. Atualmente, existem muitos softwares matemáticos que geram gráficos a partir de cálculos numéricos desenvolvidos por algoritmos, apresentando excelentes resultados. Isso não nos exime de compreender essencialmente a teoria que sustenta essas tecnologias, até para elas possam ser melhoradas com o tempo.

Para o momento, vamos tentar compreender algumas funções de acordo com as características analíticas de suas leis de formação e tentar observar os seus aspectos mais notáveis.

2.5.1 Funções algébricas

Primeiramente, olharemos para importantes conjuntos de funções:

- Funções polinomiais

  Uma função f é dita ser polinomial se sua lei de formação é dada por um polinômio de grau n, isto é, se

  $$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0,$$

  onde $n \geq 0$ é um número inteiro não negativo e os números $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n$ são coeficientes reais. É preciso que $a_n \neq 0$ para que o grau do polinômio seja n.

São exemplos de funções polinomiais as tratadas nos exemplos 2.4 e 2.5. São características notáveis de funções polinomiais o fato de não possuírem singularidades no domínio e o fato de possuírem gráficos suaves.

- Funções racionais

  Uma função f é dita ser racional se sua lei de formação for a razão de dois polinômios, isto é, se

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

  onde p e q são polinômios.

  Exemplo 2.12. A função $g(x) = \frac{1}{x}$ é uma função racional, denominada **função recíproca**. Seu gráfico é uma figura conhecida como **hipérbole**.

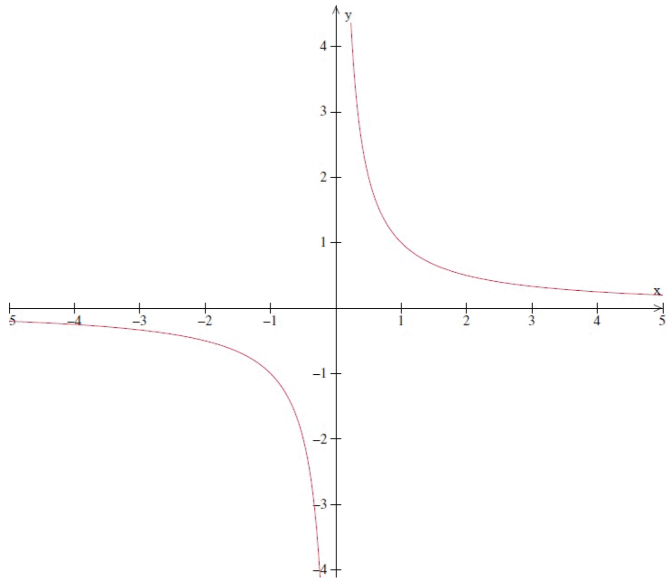


Figura 2.4: Gráfico da função $g(x) = \frac{1}{x}$.

Observe que os polinômios são casos particulares de funções racionais. Em geral, as funções racionais estão definidas em todo o conjunto dos números reais, com exceção das raízes do polinômio divisor. Seus gráficos podem apresentar, em consequência disso, singularidades como rupturas ou assíntotas verticais ou horizontais, fatos que serão discutidos posteriormente.

Em particular, no caso da função g exibida no Exemplo 2.12, vemos que há uma ruptura em $x = 0$, uma espécie de singularidade no domínio que quebra a suavidade do gráfico. Esse tipo de singularidade é típica de funções racionais. No caso particular, o eixo y é dito ser uma assíntota vertical. Outra particularidade desse gráfico é que há uma singularidade também no contradomínio, e o eixo x é dito ser uma assíntota horizontal.

Definição 2.7 (Funções algébricas)**.** Uma função f será algébrica se puder ser construída a partir de polinômios, por meio de operações algébricas (adição e subtração, multiplicação e divisão, potenciação e radiciação).

Como exemplos de funções algébricas temos as funções racionais. Outro exemplo é a função $h(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x-2}$. Funções algébricas podem apresentar singularidades diferentes das observadas nos gráficos de funções racionais.

2.5.2 Funções transcendentais

São aquelas obtidas a partir de operações envolvendo funções trigonométricas, exponenciais ou suas inversas[2]. São exemplos de funções transcendentais as funções trigonométricas, exponenciais, logarítmicas e qualquer combinação algébrica destas funções.

[2]As funções trigonométricas, de domínio real, não são bijetivas, como veremos. Apesar disso, se restringirmos o seu domínio de definição a um intervalo adequado, elas podem tornar-se bijetiva e daí, podemos considerar suas inversas.

- Funções trigonométricas

  São funções cujas leis de formação retratam as medidas trigonométricas de um arco, geralmente, medido em radianos. As mais clássicas são as funções seno, cosseno e tangente, isto é,

$$f(x) = \text{sen } x,$$

$$g(x) = \cos x$$

e

$$h(x) = \text{tg } x,$$

sendo que o domínio desta última é o conjunto $\mathbb{R} - \{k\frac{\pi}{2},\ k = \pm 1,\ \pm 3\ \pm 5,\ \cdots\}$.

Abaixo, apresentamos os gráficos dessas funções.

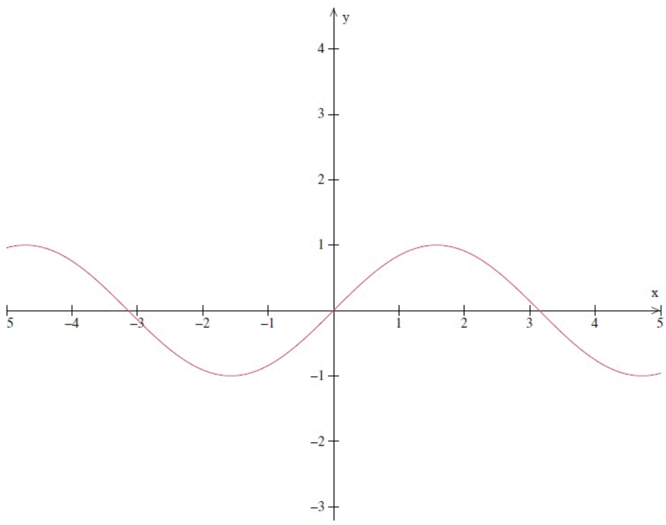


Figura 2.5: Gráfico da função $f(x) = \text{sen } x$.

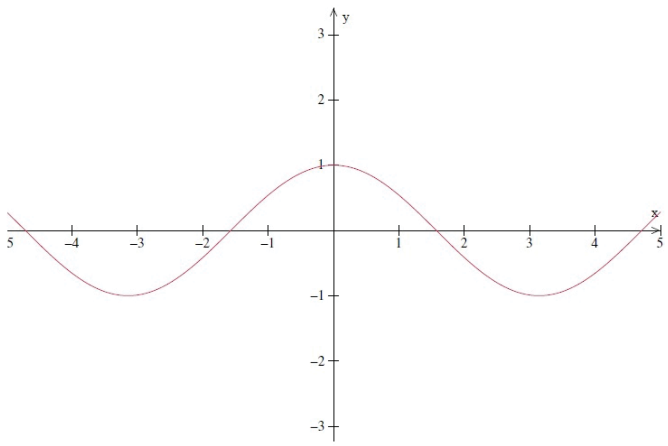


Figura 2.6: Gráfico da função $f(x) = \cos x$.

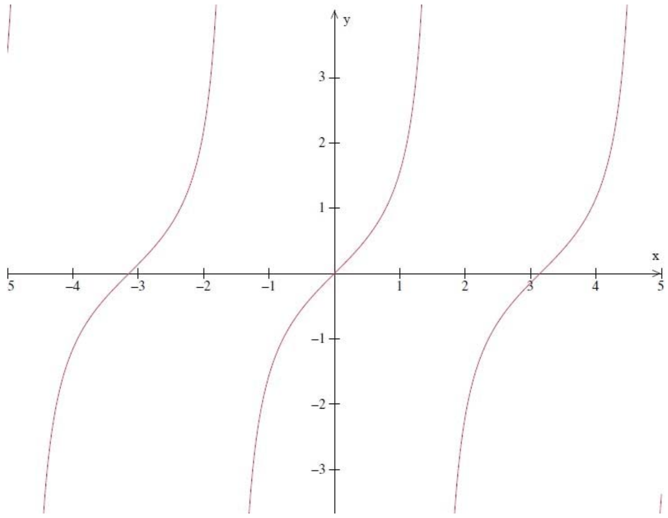


Figura 2.7: Gráfico da função $f(x) = \text{tg } x$.

Características notáveis dessas funções são a periodicidade, isto é, o seu comportamento se repete ao longo de períodos bem definidos, a simetria de seus gráficos e, no caso das funções seno e cosseno, a limitação do seu conjunto imagem.

- Funções exponenciais

  São funções do tipo

$$f(x) = a^x,$$

onde a é uma constante positiva e diferente de 1, também conhecida como a base da função exponencial. Devido às propriedades de potenciação, a base a é determinante no comportamento da curva exponencial: se $a > 1$, então a curva será crescente e, se $0 < a < 1$, então a curva será decrescente, como sugerem as figuras abaixo.

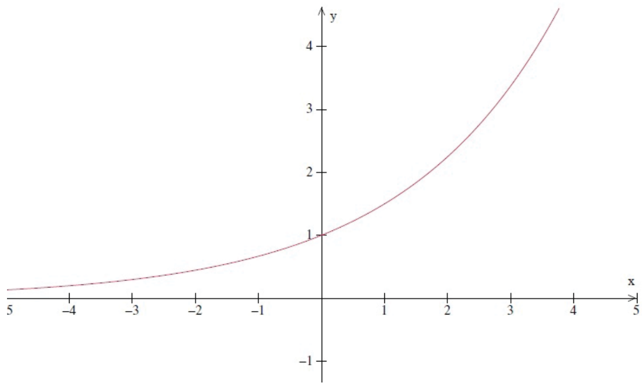


Figura 2.8: Gráfico da função $y = (1,5)^x$.

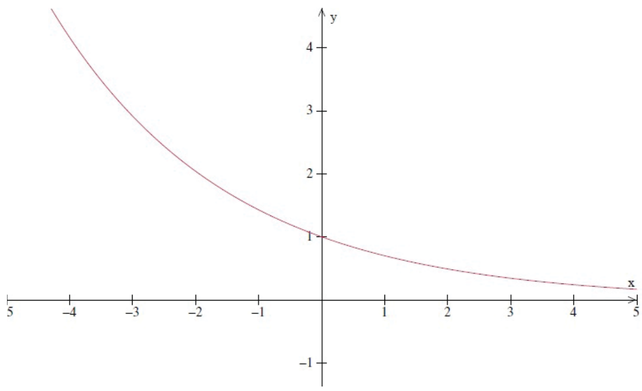


Figura 2.9: Gráfico da função $y = (0,7)^x$.

Além da questão do crescimento mencionada acima, outras características importantes desse tipo de função é que ela é sempre positiva, sendo seu conjunto imagem o intervalo $(0, \infty)$, não possui raízes e sempre intercepta o eixo y no ponto $(0, 1)$.

- Funções logarítmicas

  São funções definidas por

$$f(x) = \log_a x,$$

onde a é uma constante positiva e diferente de 1, também conhecida como a base da função logarítmica. Devido às propriedades de potenciação, a base a é determinante no comportamento da curva logarítmica[3]: se $a > 1$, então a curva será crescente e, se $0 < a < 1$, então a curva será decrescente, como sugerem as figuras abaixo.

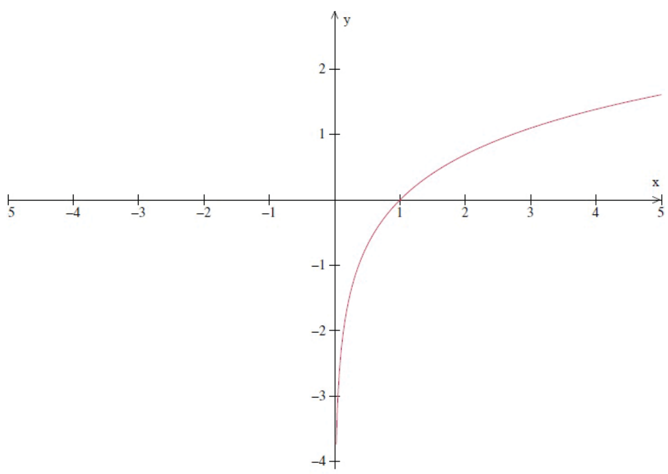


Figura 2.10: Gráfico da função $y = \ln x$.

Além da questão do crescimento mencionada acima, outras características im-

[3]Quando a base da função logarítmica é 10, costuma-se representar $\log_{10} x$ simplesmente por $\log x$ (lê-se: logaritmo decimal de x); quando a base é o número de *Euler* e, costuma-se representar $\log_e x$ simplesmente por $\ln x$ (lê-se: logaritmo natural de x).

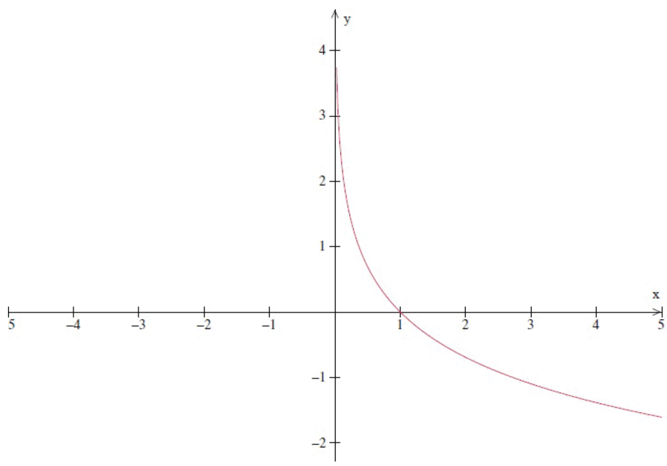


Figura 2.11: Gráfico da função $y = \log_{1/e} x$.

portantes dessa função é que ela é a inversa[4] da função exponencial, sendo definida sob o intervalo $(0, \infty)$ e tendo como conjunto imagem todo o conjunto dos números reais. Sempre intercepta o eixo x no ponto $(1, 0)$.

Quando fazemos combinações algébricas envolvendo funções algébricas e transcendentais, os gráficos tendem a ficar mais complicados, apresentando diversas restrições de domínio e diferentes singularidades.

2.5.3 Funções definidas por partes

Introduzimos esta subsecção apresentando o conceito de módulo ou valor absoluto de um número real.

Definição 2.8. Dado um número real a qualquer, definimos o valor absoluto ou

[4]Podemos definir a função exponencial de $\mathbb{R}$ em $(0, \infty)$, fazendo, assim, com que ela seja bijetiva. Dessa forma, a função exponencial torna-se inversível, e a sua inversa é a função logarítmica.

módulo de a, denotado por $|a|$, como sendo o número

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{se } a \geq 0 \\ -a, & \text{se } a \leq 0 \end{cases}.$$

O módulo de um número qualquer, pela definição, é sempre um número maior ou igual a zero. Podemos associar ao conceito de módulo a noção de distância.

Exemplo 2.13. Pela definição, $|-2| = 2$. Considerando que os números reais podem ser representados geometricamente por uma reta, podemos interpretar esse número como a distância que o número -2 se encontra da origem da reta, isto é, do número zero. Assim, dois números reais que possuem o mesmo módulo ou são iguais ou são simétricos, não havendo outra alternativa. Em geral, a expressão $|x - y|$ representa a distância na reta real que os números x e y se encontram um do outro. Resolver, portanto, a equação $|x-2| = 1$ significa encontrar todos os valores de x cuja distância até o número 2 na reta real seja igual a 1. Vemos, facilmente, que o conjunto solução dessa igualdade é $\{1, 3\}$.

Como a cada número real podemos associar um único número que corresponde à sua distância até a origem, podemos definir a função

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}.$$

Observe que f apresenta o comportamento de uma reta crescente na região do domínio corresponte ao intervalo $[0, \infty)$ e de uma reta decrescente na região $(-\infty, 0]$. Por essa razão, referimo-nos a ela como sendo uma função definida por partes.

Definição 2.9. Funções definidas por partes são aquelas definidas de maneira a assumir diferentes comportamentos em regiões distintas do domínio.

Sempre que lidamos com funções definidas por partes, esperamos encontrar singulares nos pontos do domínio onde há a ruptura no comportamento, além das singularidades usuais. Eventualmente, pode haver concordância no traçado do gráfico ao ponto de eliminar descontinuidades ou mesmo arestas.

Exemplo 2.14. A função

$$h(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x \geq 0 \\ x^2-1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

é uma função definida por partes. Imagine, como exercício, como seria o gráfico dessa função!

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1. Resolva as seguintes equações:

   a) $|w| = 3$;

   b) $|w-2| = 3$;

   c) $|3-w| = 1$;

   d) $2|2w-1| = \frac{1}{2}$.

2. Em cada item, esboce os gráficos de todas as três funções num único sistema de coordenadas.

   a) $y = |x|$, $y = |x|+1$, $y = |x|-1$.

   b) $y = |x|$, $y = |x+1|$, $y = |x-1|$.

   c) $y = |x|$, $y = 2|x|$, $y = \frac{1}{2}|x|$, $y = -|x|$.

3. Esboce os gráficos das seguintes funções definidas por partes.

   a) $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x \geq 0 \\ x^2-1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

b) $g(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x \geq 1 \\ x^2-1, & \text{se } x < 1 \end{cases}$.

c) $h(x) = |x^2 - 1|$.

d) $t(x) = |-(x-2)(x+1)|$.

4. Quantas raízes tem a função $f(x) = |4 - x^2| - 2$? Qual é o conjunto imagem dessa função?

2.6 Operações com funções

Ao considerarmos funções quaisquer de contradomínio real, digamos, f e g, com domínios $A \subset \mathbb{R}$ e $B \subset \mathbb{R}$, respectivamente, faz sentido efetuar operações com as imagens de um número comum ao domínios de f e g, desde que a operação esteja bem definida. Isso sugere a definição de funções que são resultantes de operações algébricas sobre funções conhecidas:

Definição 2.10. 1. Soma de funções

$$\begin{array}{rccl} f+g: & A \cap B & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x)+g(x) \end{array};$$

2. Diferença de funções

$$\begin{array}{rccl} f-g: & A \cap B & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x)-g(x) \end{array};$$

3. Produto de funções

$$\begin{array}{rccl} f \cdot g: & A \cap B & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) \cdot g(x) \end{array};$$

4. Razão de funções

$$\begin{array}{rcll} \dfrac{f}{g}: & \{x \in A \cap B; g(x) \neq 0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{f(x)}{g(x)} \end{array}.$$

Todas essas operações são geradoras de novas funções, com comportamentos gráficos que podem ser completamente diferentes das funções originais. Entretanto, alguns desses comportamentos podem ser controlados. É o caso de quando a função g na Definição 2.10 for constante, digamos, $g(x) = c$. Neste caso, o gráfico da função $f + c$ será o mesmo gráfico da função f, deslocado verticalmente a uma distância igual a $|c|$ para cima, se c for positivo, ou para baixo, caso contrário; já no caso da função $c.f$, o gráfico manterá o mesmo formato do gráfico da função f, a menos de um efeito sanfona de intensidade proporcional a $|c|$, e sofrerá uma reflexão em torno do eixo x, caso seja c uma constante negativa.

2.6.1 Composição de funções

Uma outra maneira de gerar novas funções a partir de funções conhecidas é a que denominaremos de **composição de funções**.

Definição 2.11. Dadas duas funções f e g, denominamos a composta de f e g, e denotamos por $f \circ g$, a função definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

para todo elemento $x \in D(g)$ tal que $g(x) \in D(f)$.

Pela definição, vemos que o domínio da função composta $f \circ g$ é o conjunto

$$D(f \circ g) = \{x \in D(g);\ g(x) \in D(f)\}.$$

Logo, a função composta estará bem definida quando o contradomínio de f for igual ao domínio de g.

A composição, por ser uma operação mais amalgamada que as tratadas na Definição 2.10, gera distorções nos gráficos das funções originais difícieis de se controlar. Isso significa que é difícil dizer como será o gráfico da composta de duas funções pelo conhecimento do gráfico de cada uma delas. Todavia, uma composição particular de uma função f qualquer com uma função g da forma $g(x) = x + c$, onde c é um parâmetro real qualquer, gera apenas um deslocamento horizontal no gráfico de f do tamanho $|c|$ para a direita, caso seja c negativo, ou para a esquerda, caso contrário.

Exemplo 2.15. Sejam $g(x) = x + 2$ e $h(x) = x \cdot \operatorname{sen} x$. A figura abaixo mostra, simultaneamente, os gráficos das funções h e $h \circ g$.

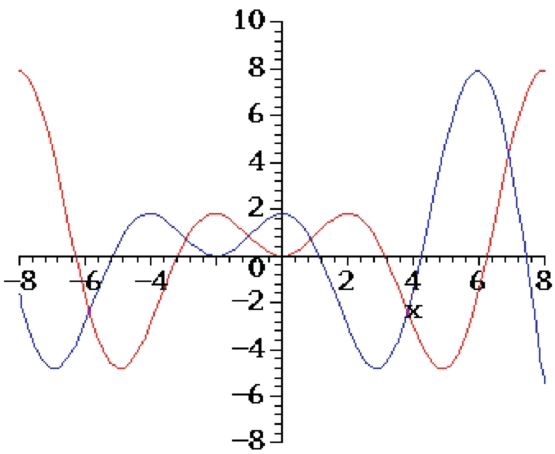


Figura 2.12: Gráficos das funções h e $h \circ g$.

A composição de funções não é uma operação comutativa, isto é, de um modo geral, $f \circ g \neq g \circ f$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1. Esboce, no mesmo plano cartesiano, os gráficos das seguintes funções reais:

   a) $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 + 1$ e $h(x) = x^2 - 2$;

   b) $f(x) = x^2$, $g(x) = (x+1)^2 + 1$ e $h(x) = (x-2)^2$.

2. Esboce o gráfico da função real de finida por $f(x) = 2 - (x-1)^2$.

3. Considere as funções $f(x) = 1 - 3x$ e $g(x) = 3x - k$, onde k é um parâmetro.

   a) Calcule $(g \circ g)(2)$.

   b) Calcule $(f \circ g)(2)$.

   c) Calcule $(g \circ f)(2)$.

   d) Determine k de sorte que se tenha $g \circ f = f \circ g$, para todo x real.

4. Considerando as funções $f(x) = x + 4$ e $g(x) = -\sqrt{x}$, julgue C (CERTO) ou E (ERRADO) os itens abaixo.

   a) ( ) $g(f(9)) = -5$.

   b) ( ) O domínio de $g \circ f$ é o conjunto $[0, \infty)$.

   c) ( ) $f(g(9)) = 1$.

5. Se $f(x) = ax + b$, mostre que

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

   Esta propriedade é válida para $f(x) = x^2$?

6. Sendo f e g funções reais com $f(x) = 3x - 2$ e $(g \circ f)(x) = 9x^2 - 3x + 1$, calcule $g(5)$.

2.7 Algumas aplicações

O objetivo desta seção é apresentar algumas aplicações de funções por meio de exercícios que simulam situações reais.

1. Em muitos países, incluindo o Brasil, a temperatura é medida na escala Celsius. Nos países que adotam o arcaico sistema inglês de medidas, como Inglaterra e Estados Unidos, a temperatura é medida na escala Farenheit. A escala Celsius adota as seguintes convenções: a água congela a $0°C$ e ferve a $100°C$. A escala Farenheit adota as seguintes convenções: a água congela a $32°F$ e ferve a $212°F$. Determine uma equação de conversão Celsius-Farenheit, sabendo que trata-se de um modelo linear.

2. Pretende-se obter o volume de uma caixa sem tampa na forma de paralelepípedo que se pode construir com uma chapa metálica quadrada com 20 cm de lado, com a retirada de pequenos quadrados de lado igual a x nos quatro cantos da chapa.

   a) Faça um desenho representando a chapa e o que deve ser retirado dela para se montar a caixa.

   b) Faça um desenho da caixa e anote as suas dimensões (largura, comprimento e altura).

   c) Recordando que o volume de uma caixa como essa é dada pela fórmula:

   $$V = \text{base} \times \text{altura},$$

   encontre uma expressão para $V(x)$, o volume da caixa em função de x.

   d) Se $x = 1$, qual é o volume da caixa?

   e) Se $x = 2$, qual é o volume da caixa?

f) Atribua alguns valores a x no intuito de descobrir um corte que otimize o volume da caixa, isto é, um valor x tal que $V(x)$ seja o maior possível.

g) Considerando a natureza do problema, faz sentido que x assuma valores negativos? E pode x ser 15 cm? Por quê?

h) Estabeleça o domínio da função V.

3. Numa indústria, o gasto para se produzir x produtos é dado, em reais, por $g(x) = \frac{x^2}{4} + 35x + 25$ e o preço de venda de cada produto é dado, em reais, por $p(x) = 50 - \frac{x^2}{2}$.

    a) Qual deve ser a produção diária para se obter um lucro máximo na venda de x produtos?

    b) Qual o custo unitário de cada produto para se ter um lucro máximo?

4. O custo de produção de um livro por uma editora é de R$ 12,00 o exemplar. Ao ser comercializado ao preço de R$ 40,00, 1.000 exemplares são vendidos. Estudos mostram que a cada R$ 0,10 que se diminui no preço de venda deste livro corresponde a um aumento de 25 unidades na quantidade vendida. Dessa forma, modificando-se o preço de venda do livro, o lucro máximo que poderá ser obtido com a venda do livro será igual a

    a) R$24.000,00.

    b) R$28.000,00.

    c) R$30.000,00.

    d) R$29.000,00.

    e) R$28.600,00.

2.8 Funções transcendentais elementares

Esta seção será dedicada ao estudo das funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas apresentadas na Subsecção 2.5.2.

2.8.1 Equações exponenciais e logaritmos

Definição 2.12. Dados $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}^*$, define-se a **n-ésima potência de** a como sendo o número

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ vezes}}.$$

Exemplo 2.16.

$$2^4 = 16 \;\text{ e }\; 0,1^3 = 0,001.$$

Um fato importante sobre números como na Definição 2.12 é que

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ vezes}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ vezes}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m+n \text{ vezes}} = a^{m+n}, \tag{2.1}$$

quaisquer que sejam $m, n \in \mathbb{N}^*$. Em particular, o número $2^5 = 2^{2+3} = 2^2 \cdot 2^3$. Usando o mesmo racicínio, poderíamos pensar em reescrever número $a^1 = a^{1+0} = a^1 \cdot a^0$, caso estivesse definida a potência a^0. Daí a ideia de, naturalmente, estender a definição apresentada para o caso em que $a \neq 0$ e $n = 0$ como sendo

$$a^0 = 1. \tag{2.2}$$

Outro importante fato relacionado a potências de um número real e que decorre imediatamente da Definição 2.12 é que, se $m < n$, então

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}.$$

Em particular, o número $2^3 = 2^{5-2} = 2^{100-97}$ pode ser visto como $\frac{2^5}{2^2}$ ou como $\frac{2^{100}}{2^{97}}$. Numa situação limite, quando $m = n$, poderíamos aplicar o mesmo raciocínio e observar que $\frac{a^n}{a^n} = a^0$. Este fato ajuda a justificar a definição apresentada na equação 2.2 e motiva a seguinte extensão para potências de números inteiros negativos.

Definição 2.13. Dados $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Exemplo 2.17.

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad 0,1^{-2} = \frac{1}{0,1^2} = \frac{1}{0,01} = 100.$$

Como consequências imediatas das definições 2.12 e 2.13 e da Equação (2.2), temos as seguintes propriedades, válidas para quaisquer m e n números inteiros:

$P_1)$ $a^{m+n} = a^m.a^n$;

$P_2)$ $a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$; e

$P_3)$ $(a^m)^n = a^{m.n}$.

Quando $a > 0$ e $a \neq 1$, prova-se que essas propriedades são válidas para quaisquer m e n reais. Em particular, para um expoente fracionário $r = \frac{m}{n}$, denotamos

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Como exemplo, temos que $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$. Em outras palavras, trabalhar com raízes n-ésimas é o mesmo que trabalhar com potências.

Assim, dado um número real $a > 0$, temos que o número a^x está bem definido para qualquer $x \in \mathbb{R}$. E a função f, que a cada número real x associa a potência a^x, é dita ser a função exponencial de base a, isto é,

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = a^x. \end{array}$$

As principais características dessa função, juntamente com o seu gráfico, foram apresentadas na Subseção 2.5.2.

Exemplo 2.18. A população de uma colônia de bactérias se reproduz a uma taxa constante de 20% ao dia. Quanto tempo a população observada num dado instante inicial demorará para quadriplicar de tamanho?

A situação apresentada no Exemplo 2.18 pode ser modelada por uma função exponencial. Se chamarmos de $P(0)$ a população observada num dado instante inicial de tempo e de $P(t)$ a população observada t dias após a observação inicial, é fácil perceber que

$$\begin{aligned} P(1) &= 1,2 \cdot P(0), \\ P(2) &= 1,2 \cdot P(1) = (1,2)^2 \cdot P(0), \\ P(3) &= 1,2 \cdot P(2) = (1,2)^3 \cdot P(0), \\ &\vdots \\ P(t) &= \ldots = (1,2)^t \cdot P(0). \end{aligned}$$

Note que a função

$$P(t) = P(0) \cdot (1,2)^t$$

corresponde, de fato, a uma função exponencial de base $1,2$, dilatada por uma constante igual a $P(0)$. A figura abaixo apresenta os gráficos das funções $f(t) = (1,2)^t$ e P, para o caso particular de ser $P(0) = 3,5$, onde a escala é dada em milhões.

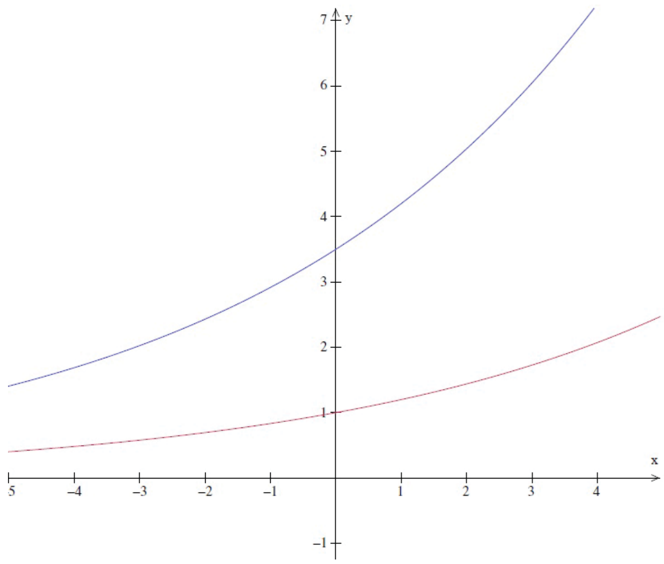


Figura 2.13: Gráficos das funções $f(t) = (1,2)^t$ e $P(t) = 3,5 \cdot (1,2)^t$.

Estamos interessados no tempo que essa população deve gastar para quadriplicar de tamanho, isto é, desejamos resolver a equação

$$P(t) = 4 \cdot P(0),$$

que é equivalente a

$$(1,2)^t = 4. \tag{2.3}$$

Equações como esta, onde a variável é um expoente, são chamadas de equações exponenciais. O expoente t é também conhecido como **logaritmo**. No caso particular da Equação (2.3), t é dito ser o logaritmo de 4 na base 1,2. No caso geral, dada uma equação exponencial da forma

$$a^x = b, \tag{2.4}$$

dizemos que x é o logaritmo de b na base a e representamos[5] esta situação assim:

$$x = \log_a b. \tag{2.5}$$

Assim, de volta à Equação (2.3), temos que $t = \log_{1,2} 4$ é a sua solução e, consequentemente, a resposta para a questão levantada no Exemplo 2.18. Resta-nos encontrar maneiras de compreender melhor que número é esse.

Como as equações 2.4 e 2.5 expressam a mesma coisa, é natural que as condições da definição dos logaritmos sejam as mesmas que das potências e, consequentemente,que as propriedades operatórias dos logaritmos sejam simples versões das propriedades operatórias de potências. Assim, podemos concluir, imediatamente, que as expressões

$$\log_a 1 = 0 \text{ e } \log_a a = 1$$

são equivalentes, respectivamente, a

$$a^0 = 1 \text{ e } a = a^1,$$

sempre que for $a \neq 1$. Além disso, de modo análogo às propriedades operatórias da potenciação P_1, P_2 e P_3, apresentadas anteriormente, são propriedades operatórias dos logaritmos:

$\widetilde{P}_1$) $\log_a(m \cdot n) = \log_a m + \log_a n$;

$\widetilde{P}_2$) $\log_a \left(\dfrac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$; e

$\widetilde{P}_3$) $\log_a m^n = n \log_a m$.

[5] Quando a base do logaritmo é 10, representamos $\log_{10} x$ simplesmente como $\log x$ (lê-se: logaritmo decimal de x). Quando a base do logaritmo é o número irracional e, representamos $\log_e x$ como lnx (lê-se: logaritmo natural de x).

A prova das propriedades $\widetilde{P}_1$, $\widetilde{P}_2$ e $\widetilde{P}_3$ são deixadas como exercício para o leitor. Na sequência, apresentamos duas outras importantes propriedades operatórias de logaritmos.

Proposição 2.3. *Sejam $a > 0$, $b > 0$, $b \neq 1$ e $c \in \mathbb{R}$. Então, vale a identidade*

$$\log_{b^c} a = \frac{1}{c} \log_b a.$$

Demonstração: De fato, pelas equações 2.4 e 2.5, temos que

$$\begin{aligned} \log_{b^c} a = x \quad &\Leftrightarrow \quad (b^c)^x = a \quad \Leftrightarrow \quad b^{xc} = a \\ &\Leftrightarrow \quad cx = \log_b a \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{c} \log_b a. \end{aligned}$$

♦

Proposição 2.4 (Mudança de base)**.** *Sejam $a > 0$, $b > 0$ e $b \neq 1$. Então, vale a identidade*

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}, \quad \textit{qualquer que seja } c > 0 \textit{ e } c \neq 1.$$

Demonstração: Sejam

$$x = \log_b a, \; y = \log_c a \; \text{ e } \; z = \log_c b.$$

Pelas equações 2.4 e 2.5, temos que

$$b^x = a, \; c^y = a \; \text{ e } \; c^z = b.$$

Daí e da Proposição 2.3, segue que

$$x = \log_b a = \log_{c^z} c^y = y \log_{c^z} c = \frac{y}{z} \log_c c = \frac{y}{z}.$$

♦

Como no caso anterior, dado um número real $a > 0$ e $a \neq 1$, temos que o número $\log_a x$ está bem definido para qualquer $x \in (0, \infty)$. E a função g, que a cada número real x associa o número $\log_a x$, é dita ser a função logarítmica de base a, isto é,

$$\begin{array}{rccl} g: & (0, \infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & g(x) = \log_a x. \end{array}$$

A função logarítmica de base a é a inversa da função exponencial de base a.

Exercícios

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1. Exprima em termos de logaritmos:

   a) $4^2 = 16$;

   b) $3^4 = 81$;

   c) $81^{0,5} = 9$;

   d) $32^{\frac{4}{5}} = 16$.

2. Exprima em termos de expoentes:

   a) $\ln e = 1$;

   b) $\log_2 8 = 3$;

   c) $\log_2 \frac{1}{4} = -2$;

   d) $\log_6 216 = 3$.

3. Calcule:

   a) $\log 10.000$;

   b) $\log_2 64$;

   c) $\log 0,0001$;

   d) $\log_8 4$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

4. Em cada caso, calcule o valor de x.

   a) $\log_4 x = 3,5$

   b) $\log_3 x = 5$

   c) $\log_{32} x = 0,6$

   d) $\log_8 x = \frac{5}{3}$

5. Em cada caso, calcule o valor da base a.

   a) $\log_a 4 = 0,4$

   b) $\log_a 8 = -\frac{3}{4}$

   c) $\log_a 36 = 2$

   d) $\log_a 7 = \frac{1}{2}$

6. Sendo $f(x) = \log_3\left(\frac{1}{ax-b}\right)$ uma função com valores reais e supondo que $f(0) = -1$ e $f(1) = -2$, é CORRETO afirmar que $f(4)$ é

   a) -3.

   b) -4.

   c) -5.

   d) -6.

7. A população de uma colônia de bactérias se reproduz a uma taxa constante de 20% ao dia. Quanto tempo a população observada num dado instante inicial demorará para quadriplicar de tamanho? (Use as seguintes aproximações: $\log 2 = 0,3$ e $\log 12 = 1,08$.)

8. A intensidade M de um terremoto, medida na escala Richter, é um número que varia de $M = 0$ a $M = 8,9$ para o maior terremoto conhecido. M é dada pela fórmula empírica

$$M = \frac{2}{3}\log\frac{E}{E_0},$$

onde E é a energia liberada no terremoto em quilowatt-hora (kWh) e $E_0 = 7.10^{-3}$ kWh.

a) Quanta energia é liberada num terremoto de grandeza 6?

b) Uma cidade de 300.000 habitantes utiliza cerca de 3.10^5 kWh de energia por dia. Se a energia de um terremoto pudesse ser de alguma forma transformada em energia elétrica, a energia produzida pelo terremoto do item a) seria capaz de abastecer essa cidade por quantos dias?

c) O grande terremoto do Alasca (1964) teve uma grandeza de 8,4 na escala Richter. Responda ao item b) para esse terremoto, utilizando a aproximação $10^{\frac{3}{5}} \cong 4$.

9. Em química, o pH[6] de uma solução é definido pela fórmula

$$pH = -\log[H^+],$$

onde $[H^+]$ denota a concentração de íon de hidrogênio medida em moles por litro. Um mol - ou peso molecular grama - de uma substância contém 6.10^{23} moléculas da substância. O valor de $[H^+]$ para a água pura é encontrado experimentalmente como sendo $1,00.10^{-7}$.

a) Qual o pH da água pura?

b) Uma solução chama-se ácida ou básica (alcalina), conforme o valor de sua $[H^+]$ seja maior ou menor que a da água pura. Quais os pH que caracterizam as soluções ácidas e básicas?

10. Supondo satisfeitas as condições de existência de cada um dos logaritmos envolvidos nessa questão, assinale a única alternativa que NÃO corresponde a uma propriedade operatória dos logaritmos.

[6] O símbolo pH é uma abreviação da expressão francesa *puis-sance d'Hydrogène* (potência de Hidrogênio).

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

a) $\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b$

b) $\log_c\left(\dfrac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b$

c) $\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$, para qualquer $c > 0$ e $c \neq 1$

d) $\log_c\left(\dfrac{a}{b}\right) = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$

e) $\log_b a^c = \log_{b^{1/c}} a$

2.8.2 Um pouco de trigonometria

Nesta seção, nos dedicaremos a compreender um pouco melhor as funções trigonométricas apresentadas na Subseção 2.5.2. Comecemos relembrando alguns fatos elementares da geometria plana e definindo as razões trigonométricas fundamentais[7].

Uma poligonal é um conjunto de segmentos de reta consecutivos e não pertencentes a mesma reta. Poligonais podem ser abertas, fechadas ou entrelaçadas. Poligonais fechadas que não são entrelaçadas, isto é, aquelas que se fecham por uma extremidade de um segmento de reta que a compõe e que não possuem autointersecção, são ditas ser polígonos.

Existem diversas maneiras de se classificar polígonos, duas delas é pelo número de lados que apresentam e por sua regularidade. Um polígono é dito ser regular quando possui todos os lados e todos os ângulos internos congruentes.

Os triângulo são os polígonos mais simples que existem, compostos de três lados e três ângulos internos. Quanto aos lados, os triângulos são classificados em:

- escaleno: quando todos os lados têm medidas distintas;

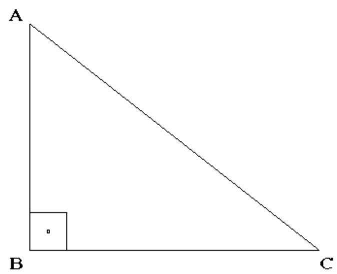
[7]Outras razões trigonométricas importantes relacionadas a um arco x são a **secante de** x , a **cossecante de** x e a **cotangente de** x, dadas, respectivamente, por $\sec x = \frac{1}{\text{sen } x}$, $\csc x = \frac{1}{\cos x}$ e $\text{cotg } x = \frac{1}{\text{tg } x}$.

- isósceles: quando dois dos seus lados apresentam mesma medida; e
- equilátero[8]: quando os três lados apresentam a mesma medida.

Quanto aos ângulos internos, triângulos são classificados em:

- acutângulo: quando todos os ângulos internos são agudos;
- obtusângulo: quando um dos seus ângulos internos é obtuso; e
- retângulo: quando possui um ângulo reto.

Inicialmente, considere o triângulo retângulo ABC da figura abaixo.



Dado um ângulo[9] agudo x de ABC, o que chamaremos de **seno de** x é a medida percentual do cateto oposto a x, quando comparado à hipotenusa do triângulo ABC; chamaremos de **cosseno de** x a medida percentual do cateto adjacente a x quando

[8] O triângulo equilátero é um triângulo regular.

[9] Ângulos podem ser medidos em graus, radianos ou gradiano (também chamado de grado). Um ângulo de origem num ponto O medirá um grau ($1°$) se ele enxergar a 360^a parte do comprimento da circunferência centrada em O; medirá um radiano ($1\,rad$) se ele enxergar um arco de comprimento igual ao raio da circunferência centrada em O; medirá um grado ($1\,grad$) se enxergar a 400^a parte do comprimento da circunferência centrada em O. As medidas mais utilizadas são o grau e o radiano. Transitar do sistema de medida grau para o radiano é fácil, visto que são sistemas diretamente proporcionais e a $180°$ correspondem π radianos.

comparado à hipotenusa, e chamaremos de **tangente de** x a comparação entre o seno e o cosseno de x. Isto é,

$$\text{sen}x = \frac{\text{medida do cateto oposto a } x}{\text{medida da hipotenusa}}, \tag{2.6}$$

$$\cos x = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } x}{\text{medida da hipotenusa}} \tag{2.7}$$

e

$$\text{tg}x = \frac{\text{sen}x}{\cos x}. \tag{2.8}$$

Note que

$$\text{tg}x = \frac{\text{sen}x}{\cos x} = \frac{\dfrac{\text{medida do cateto oposto a } x}{\text{medida da hipotenusa}}}{\dfrac{\text{medida do cateto adjacente a } x}{\text{medida da hipotenusa}}} = \frac{\text{medida do cateto oposto a } x}{\text{medida do cateto adjacente a } x}.$$

Uma identidade fundamental da geometria envolvendo triângulos retângulos é o Teorema de Pitágoras.

Teorema 2.1 (Teorema de Pitágoras)**.** *Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.*

Existem diversas provas para este teorema, a maioria delas muito fáceis de se compreender. Entretanto, não exibiremos nenhuma demonstração aqui.

Uma consequência direta do Teorema de Pitágoras é apresentada abaixo:

Proposição 2.5. *Seja x um ângulo agudo num triângulo retângulo qualquer. Então*

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Demonstração: Segue da definição de sen$x$ e $\cos x$ e do Teorema de Pitágoras. ♦

Apesar da evolução das calculadores científicas e gráficas, é importante compreender a fundo as funções trigonométricas visto que inúmeros fenômenos, sobretudo os periódicos, podem ser modelados por essas funções.

Medidas trigonométricas dos arcos $30°$, $45°$ e $60°$

Vamos deduzir as medidas trigonométricas dos arcos $30°$, $45°$ e $60°$, também conhecidos como arcos notáveis. Os ângulos de $30°$ e $60°$ surgem, por exemplo, da divisão de um triângulo equilátero qualquer por uma de suas alturas, resultando em dois triângulos retângulos congruentes (Figura 2.8.2). O ângulo de $45°$ surge, por exemplo, da divisão de um quadrado qualquer por uma de suas diagonais, resultando em dois triângulos retângulos congruentes (Figura 2.8.2).

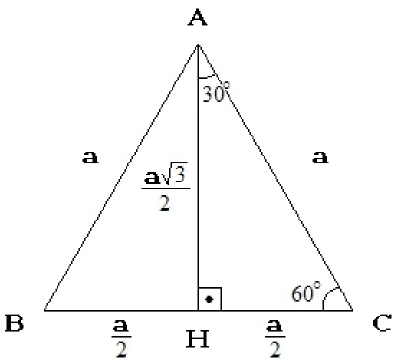


Figura 2.14: Triângulo equilátero.

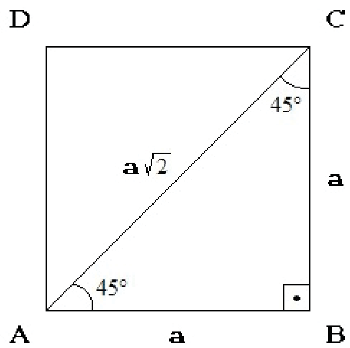


Figura 2.15: Quadrado.

Aplicando as definições (2.6), (2.7) e (2.8) nas informações presentes nas figura acima, obtemos que

	$30°$	$45°$	$60°$
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

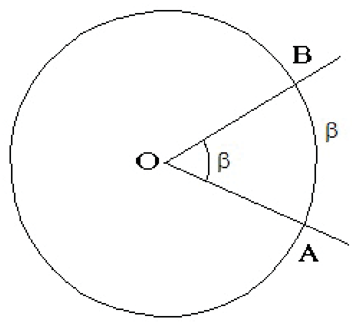
.

Note que essas medidas são independentes dos lados dos triângulos retângulos considerados, dizendo respeito apenas ao seu formado, determinado pelo ângulo. Em outras palavras, essas são informações intrínsecas à medida do ângulo considerado.

Se considerarmos um ângulo de medida x qualquer, $0° < x < 90°$, existe um triângulo retângulo que possui x como um dos seus ângulos internos. Daí, não é difícil imaginar que a cada ângulo agudo x estão bem definidas as medidas $\text{sen}x$, $\cos x$ e $\text{tg}x$.

O ciclo trigonométrico e a generalização das medidas trigométricas para arcos quaisquer

Um ângulo é a abertura existente entre duas semirretas que concorrem na origem. O tamanho do ângulo é observado através de uma circunferência qualquer centrada no ponto de intersecção dessas semirretas. Para se medir um ângulo, pode-se adotar várias unidades de medida. As mais comuns são o **grau**, o **radiano** e o **grado**.



Como convenção, para que a medida seja dada em graus (°), considera-se que a uma abertura correspondente a uma circunferência completa corresponda a 360° e, se não houver abertura alguma, que isso corresponda a 0°. A partir daí, a medida, em graus, de todas as outras aberturas se dariam proporcionalmente ao tamanho dos arcos da circunferência que as mesmas enxergam.

Para a medida em grado (grad), utiliza-se o mesmo raciocínio, porém a convenção é 400 grad para a circunferência completa.

Já para se produzir medidas em radiano (rad), utiliza-se como parâmetro de observação a circunferência unitária e a medida do ângulo será o comprimento do arco observado. Dessa forma, desde que o perímetro de uma circunferência de raio unitário é 2π unidades de medida, à um ângulo que enxerga a circunferência completa é atribuída a medida de 2π rad e, se não houver abertura alguma, a medida correspondente será 0 rad.

Percebe-se, assim, uma relação de proporcionalidade direta entre essas escalas:

$$360^\circ \Leftrightarrow 2\pi \;\; \text{rad} \;\; \Leftrightarrow 400 \;\; \text{grad},$$

onde a seta gorda "$\Leftrightarrow$" significa uma relação de equivalência entre os objetos que ela indica.

As informações sobre as medidas $\text{sen}x$, $\cos x$ e $\text{tg}x$, bem definidas para qualquer ângulo agudo x por associação geométrica a triângulos retângulos, podem ser generalizadas para ângulos de tamanhos quaisquer[10], inclusive de medida negativa[11].

Para tanto, utilizamos o **ciclo trigonométrico**. O ciclo trigonométrico é um sistema composto por uma circunferência de raio unitário centrada na origem do plano cartesiano (o ponto $O = (0, 0)$) e orientada, a partir do ponto $A = (1, 0)$, no

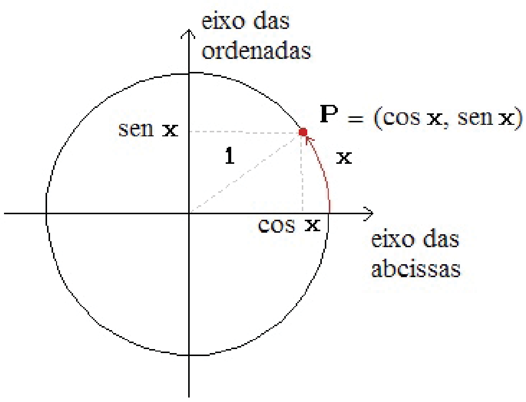
[10] O conceito de tangente será generalizado, mas não para qualquer medida de arco.

[11] Ângulos de medida negativa são aqueles cuja abertura se faz no sentido contrário a uma orientação pré-estabelecida. Por exemplo, num circuito circular, onde pedestres desenvolvem uma caminhada, pode se fixar um sentido positivo de percurso. A cada arco percorrido pelo pedestre corresponde um ângulo de abertura, medido no centro do circuito. Um outro pedestre, por sua vez, pode percorrer a pista na direção contrária. O ângulo correspondente, nesse caso, será negativo e essa é uma maneira de indicar que o percurso está sendo desenvolvido na contramão.

sentido anti-horário. Nele, cada comprimento de arco, medido a partir do ponto A (**origem do sistema**), representa a medida do ângulo central que o enxerga em radianos.

Considere, no ciclo trigonométrico, um arco de medida x radianos, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, partindo da origem do sistema, cujo ponto de extremidade (**afixo** do arco) é um ponto P. Usaremos a seguinte notação para expressar essa ideia: $\widehat{AP} = x$. Uma interpretação geométrica rápida, baseada na análise do triângulo retângulo apoiado no ciclo trigonométrico e que possui o segmento de reta $\overline{OP}$ como hipotenusa, nos permite concluir que o ponto P possui $\cos x$ como abscissa e $\text{sen}x$ como ordenada, isto é,

$$P = (\cos x, \text{sen}x).$$



Em outras palavras, no primeiro quadrante do ciclo trigonométrico, as coordenadas do afixo P indicam a medida do cosseno e do seno, respectivamente, do ângulo central que enxerga o arco $\widehat{AP}$. A partir dessa interpretação, podemos generalizar a noção das medidas trigonométricas de um ângulo para medidas quaisquer, assim:

Definição 2.14. Seja x a medida de uma arco qualquer $\widehat{AP}$, de afixo $P = (a, b)$, num ciclo trigonométrico de origem A. Então, por definição,

$$\cos x = a,$$

$$\text{sen}x = b$$

e, para as medidas x tais que $\cos x \neq 0$,

$$\text{tg}x = \frac{\text{sen}x}{\cos x}.$$

Pela definição acima, agora faz sentido falarmos, por exemplo, de $\text{sen}\frac{3\pi}{2}$, de $\cos(-\frac{\pi}{3})$ ou de $\text{tg}(2\pi)$.

Estudo das funções trigonométricas através do ciclo trigonométrico

A simplicidade da geometria da circunferência facilita o estudo das funções trigonométricas. Recordemos-nos que os eixos coordenados do plano cartesiano subdividem o ciclo trigonométrico em quatro **quadrantes** distintos. Eles são denominados de 1°, 2°, 3° e 4° quadrante, respectivamente, no sentido da orientação estabelecida (sentido anti-horário).

A partir de agora, vamos melhorar nossa compreensão em torno das funções trigonométricas. Para tanto, usaremos fortemente a geometria da circunferência. Observe, inicialmente, que os ângulos $\frac{\pi}{6}rad$, $\frac{13\pi}{6}rad$ e $-\frac{11\pi}{6}rad$ (respectivamente $30°$, $390°$ e $-330°$) são **côngruos**, isto é, possuem o mesmo afixo. Isso faz com que as medidas trigonométricas relacionadas a esses ângulos sejam exatamente as mesmas.

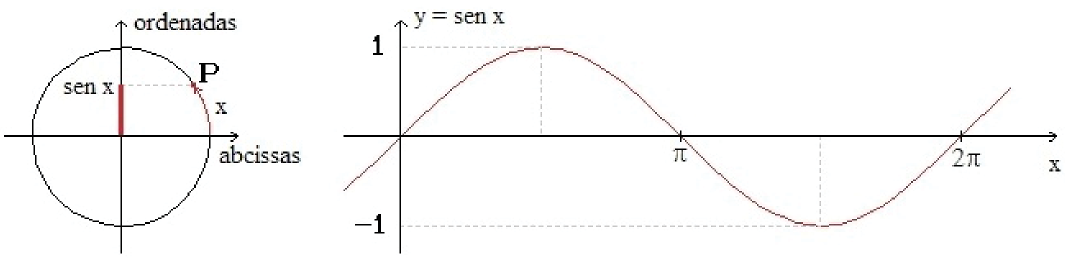
Desde que a variedade de afixos no ciclo trigonométrico pode ser capturada em apenas uma volta completa no ciclo, toda informação trigonométrica também poderá ser capturada nesse **período**. Nos ocupemos, inicialmente, do seno de um arco.

Sabemos que a cada arco $x \in \mathbb{R}$ podemos associar um número do tipo $\operatorname{sen} x \in [-1, 1]$. Fica, assim, bem definida a **função seno**, dada por

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \rightarrow & [-1, 1] \\ & x & \mapsto & \operatorname{sen} x. \end{array}$$

Vamos observar o comportamento do seno de um arco de medida x ao longo dos quatro primeiros quadrantes, isto é, quando $x \in [0, 2\pi]$. Quando x é um arco do 1° ou 2° quadrante, a medida do seu seno é não negativa; quando x está no 3° ou 4° quadrante, a medida do seu seno será não positiva. Essas conclusões podem ser tiradas num simples passeio no ciclo. Mais que isso, as imagens de x pela função f se repetem ao se repetir o passeio. Assim, a função f possui um **comportamento periódico**, isto é, as imagens da função f se repetem a cada período de amplitude 2π. Em outras palavras,

$$f(x) = f(x + 2\pi), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$



Analogamente, está bem definida a **função cosseno**, dada por

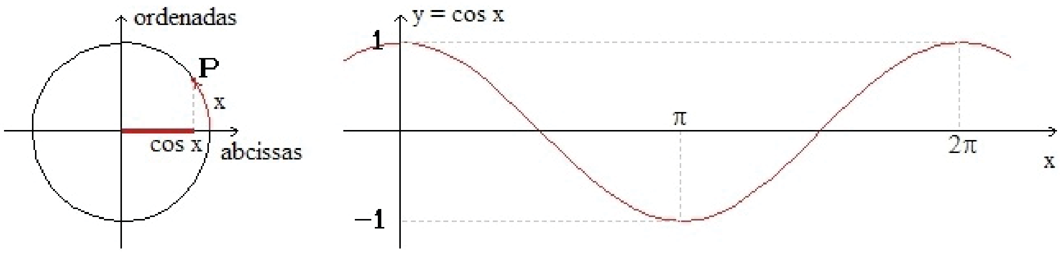
$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R} & \rightarrow & [-1, 1] \\ & x & \mapsto & \cos x. \end{array}$$

Ao longo do primeiro quadrante, isto é, quando a medida x do arco é tal que

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ o valor de $cosx$ é positivo; quando x é tal que $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, a medida do seu cosseno será negativo, voltando a ser positivo quando $x \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$. Essas conclusões também podem ser tiradas num simples passeio no ciclo.

Tal como a função f, a função g também apresenta comportamento periódico, isto é,

$$g(x) = g(x + 2\pi), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$



Outras informações sobre crescimento, raízes, máximos e mínimos dessas funções podem ser obtidas diretamente da análise geométrica do ciclo trigonométrico e serão deixadas como exercício.

Se x é tal que $\cos x \neq 0$, podemos definir tg$x$. Desde que

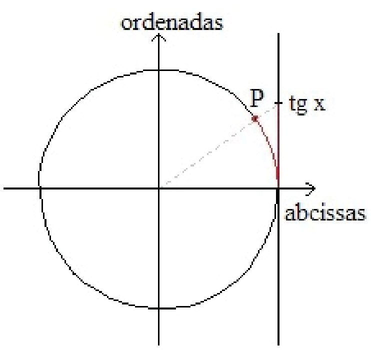
$$\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k.\frac{\pi}{2}, \; k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots,$$

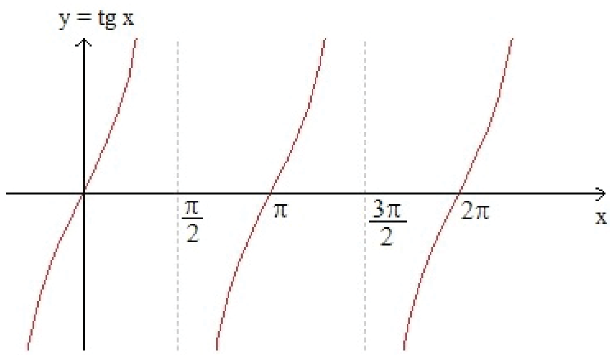
fica bem definida a **função tangente**, dada por

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R} - \left\{\frac{k\pi}{2}, \; k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\right\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{\text{sen}x}{\cos x} \end{array}.$$

A função tangente é também periódica, mas, diferentemente das funções seno e cosseno, o seu período tem amplitude π, isto é,

$$h(x) = h(x + \pi), \ \forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{k\pi}{2}, \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \right\}.$$





Exercícios

1. Julgue C (CERTO) ou E (ERRADO) cada um dos seguintes itens abaixo. Justifique seus julgamentos por meio de figuras.

   a) ( ) Se α é um arco do 3° quadrante, então o valor de $\cos\alpha$ é positivo.

   b) ( ) Se β é um arco do 2° quadrante, então o valor de $\cos\beta$ é positivo.

   c) ( ) O afixo, ou extremidade, do arco de $\frac{5\pi}{6}$ rad no ciclo trigonométrico é o ponto $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

   d) ( ) O afixo, ou extremidade, do arco de 2.009π no ciclo trigonométrico é o ponto (-1,0).

   e) ( ) Os arcos $\frac{\pi}{6}$ e $-\frac{\pi}{6}$ têm o mesmo valor para seus senos.

   f) ( ) $\text{sen}(x) = \text{sen}(\pi + x)$, qualquer que a medida do arco x.

   g) ( ) $\cos(x) = \cos(\pi - x)$, qualquer que a medida do arco x.

   h) ( ) Considere α e β arcos do primeiro quadrante do ciclo trigonométrico. Se $\alpha < \beta$, então $\cos\alpha > \cos\beta$.

   i) ( ) Considere α e β arcos do terceiro quadrante do ciclo trigonométrico. Se $\alpha < \beta$, então $\text{sen}\alpha > \text{sen}\beta$.

   j) ( ) Para arcos do terceiro quadrante, vale a relação: quanto maior o arco, maior o valor do seu cosseno.

3. Uma introdução ao cálculo diferencial e integral

O objetivo central do Cálculo é o estudo de grandezas relacionadas como funções. Por essa razão, o capítulo anterior foi dedicado às funções clássicas, aquelas que conhecemos do Ensino Médio.

Interessa ao Cálculo o estudo do comportamento das funções de uma maneira geral, de forma dinâmica e mais aprofundada. Questões como o estudo das taxas de variação entre grandezas e a acumulação de quantidades são de notório interesse para essa disciplina.

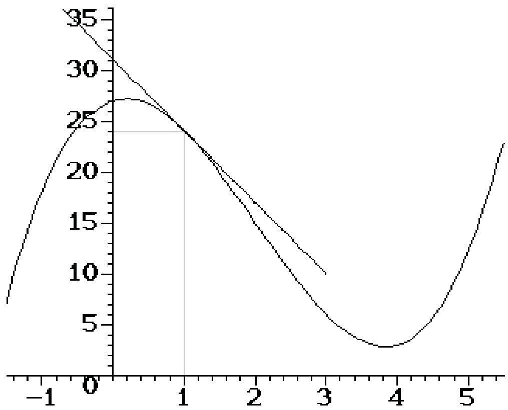
Desenvolvido por Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried Leibniz (1646-1716), em trabalhos independentes, o Cálculo é disciplina básica de cursos nos mais variados ramos da ciência. Seu estudo pode ser dividido em Cálculo Diferencial e Cálculo Integral.

Há vários problemas no processo de aprendizagem do Cálculo: terminologia não familiar, notação enigmática, métodos computacionais especializados. Essas dificuldades tornam o processo de aprendizagem do Cálculo semelhante ao processo de aprendizagem de uma língua estrangeira.

3.1 Os problemas fundamentais do Cálculo

Apesar das questões já mencionadas que dificultam o processo de aprendizagem do Cálculo, os problemas centrais do assunto são muito claros.

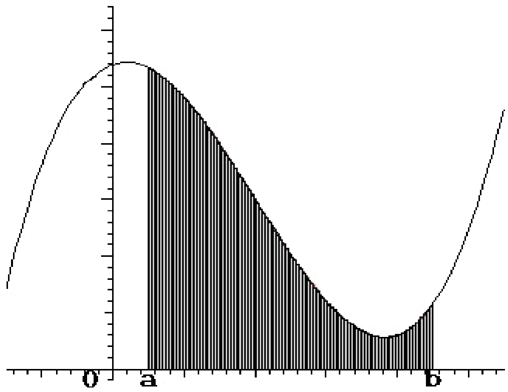
PROBLEMA 1: Como calcular o coeficiente angular da reta que tangencia o gráfico de uma função num dado ponto P?



PROBLEMA 2: Como calcular a área sob o gráfico de uma função e compreendida entre as retas $x = a$ e $x = b$?

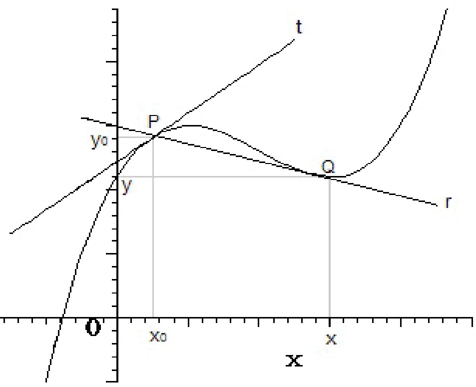
À primeira vista, tais problemas parecem ter alcance limitado. Mas é surpreendente a quantidade de problemas nos mais diversos campos da ciência que se resumem a eles.

Vamos explorar um pouco cada um desses problemas, introduzir alguma notação para, posteriormente, desenvolver os procedimentos técnicos.



3.1.1 O Problema 1

Considere uma função f contínua com um gráfico suficientemente suave e um ponto $P = (x_0, y_0)$ fixo, pertencente ao gráfico de f.



Dado um ponto $Q = (x, y)$ qualquer, sabemos calcular a inclinação a_r da reta r que passa por P e Q. Isto é,

$$a_r = \frac{y - y_0}{x - x_0}.$$

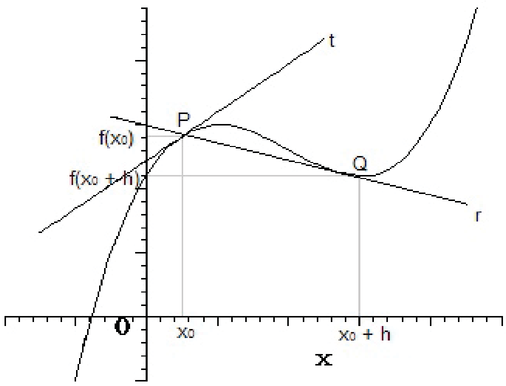
Queremos calcular a inclinação a_t da reta t que tangencia a função f no ponto

P. Supondo que seja possível deslizar o ponto Q sobre a curva f, a reta r mudaria de inclinação, conforme o deslizamento de Q. Ao aproximarmos o ponto Q do ponto fixo P, a partir de um determinado momento, a inclinação da reta r estaria tão próxima da inclinação da reta t que se confundiria com a própria inclinação da reta t.

Diremos, assim, que

$$a_t = \lim_{Q \to P} \frac{y - y_0}{x - x_0} = \lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} \frac{y - y_0}{x - x_0}.$$

Numa formulação equivalente, conforme figura abaixo,

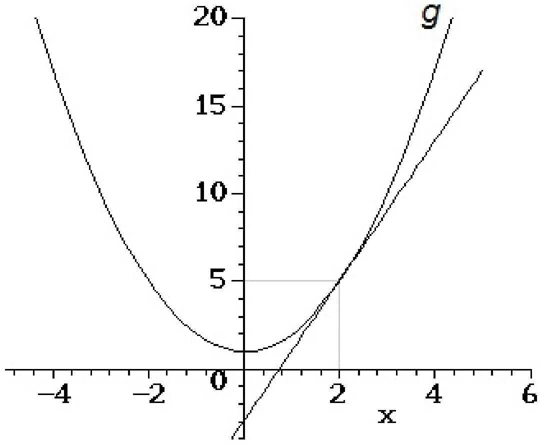


$$a_t = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

onde h representa um incremento qualquer na quantidade x_0 e $f(x_0 + h) - f(x_0)$ o incremento na variável y consequente do primeiro incremento.

A inclinação a_t da reta t tangente a f no ponto P, quando possível de ser determinada, é dita ser a **derivada da função f em x_0** e denotada por $f^{'}(x_0)$ ou $\frac{df}{dx}(x_0)$.

Exemplo 3.1. Para determinar a inclinação da reta tangente à curva $g(x) = x^2 + 1$ no ponto da curva de abscissa $x = 2$, basta calcular a derivada de g quando $x = 2$.



$$\begin{aligned}
g^{'}(2) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(2+h) - g(2)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2 + 1 - 2^2 - 1}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 2^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(4+h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 4 + h \\
&= 4
\end{aligned}$$

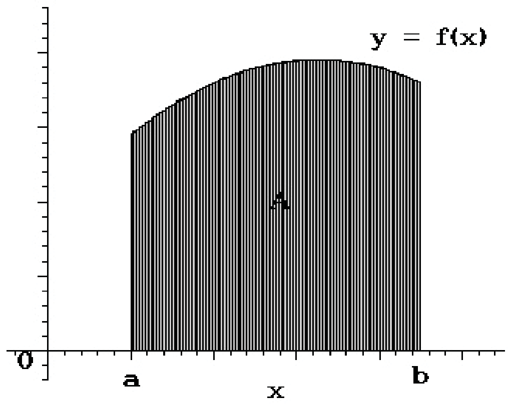
Com a informação da inclinação da reta t e sabendo que ela passa pelo ponto (2,5), podemos determinar que a equação da reta t é dada por

$$t : y = 4x - 3.$$

A verificação desse fato fica como exercício.

3.1.2 O Problema 2

Seja f uma função não negativa definida num intervalo fechado $[a, b]$. Supondo que f seja uma função contínua (veremos adiante o significado preciso de continuidade), desejamos calcular a área A sombreada na figura abaixo.



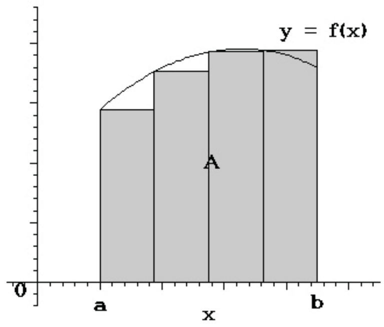
Note que somente a parte superior da figura é curva. Isto facilita o cálculo de A através da utilização do **método de exaustão**, que descrevemos abaixo.

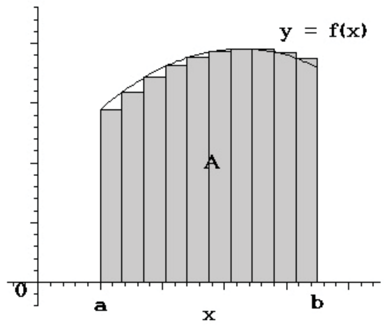
Seja n um número inteiro positivo. Divida $[a, b]$ por uma partição[1] composta por n subintervalos de mesmo comprimento. Usando cada subintervalo como base, construa um retângulo apoiado na função f e que fique sob essa função.

Se S_n é a soma das áreas desses n retângulos, espera-se que

$$A = \lim_{n \to \infty} S_n.$$

[1]Uma partição de um intervalo $[a, b]$ é um conjunto de pontos $\{x_0, x_1, \cdots, x_k\}$ tal que $x_0 = a$, $x_k = b$ e $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$.





Mais precisamente, sejam

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$$

e denotemos $\Delta x_k := x_k - x_{k-1}$ o comprimento do k-ésimo subintervalo. Como os intervalos têm o mesmo comprimento, temos que

$$\Delta x_k = \frac{b-a}{n}.$$

Seja m_k o valor mínimo de f no subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Então

$$m_k = f(\overline{x_k}), \text{ para algum } \overline{x_k} \in [x_{k-1}, x_k].$$

Assim,

$$S_n = f(\overline{x_1})\Delta x_1 + f(\overline{x_2})\Delta x_2 + \cdots f(\overline{x_n})\Delta x_n,$$

isto é,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x_k})\Delta x_k$$

e espera-se que

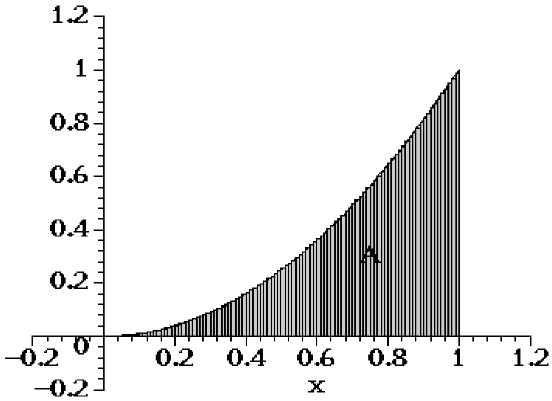
$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x_k})\Delta x_k.$$

Neste caso, denotaremos

$$A = \int_a^b f(x)dx,$$

a **integral de f definida no intervalo** $[a, b]$.

Exemplo 3.2. Neste exemplo, vamos calcular $\int_0^1 x^2 dx$. Como a função $g(x) = x^2$ é uma função não negativa no intervalo $[0, 1]$, estamos interessados na área sob o gráfico dessa função compreendida entre as retas $x = 0$, $x = 1$ e $y = 0$ (o eixo x).



Usando o método da exaustão e observando que a função g é crescente nesse intervalo, temos que

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} g(x_k)\Delta x_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} g(\frac{k}{n})\frac{1}{n} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2}\frac{1}{n} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3} \\
&= \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 \\
&= \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{3}.$$

3.2 Limites e Derivadas

Na seção anterior, vimos que para calcular a inclinação da reta que tangencia uma curva f suficientemente suave num ponto de coordenada $(x_0,\, y_0)$ pertencente ao domínio D de f, basta calcular a quantidade

$$f^{'}(x_0) := \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

se essa quantidade existir.

De uma maneira geral, podemos considerar uma função f' dada por

$$\begin{array}{rcccl} f' & : & \widetilde{D} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}, \end{array}$$

onde $\widetilde{D}$ é o conjunto dos x onde o limite acima existe. Dizemos que a função f' é a função **derivada da função** f. Dizemos que f **é derivável em** a (ou diferenciável em a) se $a \in \widetilde{D}$. Quando $\widetilde{D} = D$, dizemos que f é **derivável** (ou diferenciável).

Exemplo 3.3. Usando a definição apresentada, a derivada da função $g(x) = x^3$ é dada por:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} &&= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} &&= \lim_{h\to 0}\frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2) &&= 3x^2. \end{aligned}$$

Exemplo 3.4. Se $h(x) = \frac{1}{x}$, então, pela definição de derivada, temos que

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{l\to 0}\frac{h(x+l)-h(x)}{l} &&= \lim_{l\to 0}\frac{\frac{1}{x+l}-\frac{1}{x}}{l} \\ &= \lim_{l\to 0}\frac{\frac{x-(x+l)}{x(x+l)}}{l} &&= \lim_{l\to 0}\frac{\frac{-l}{x(x+l)}}{l} \\ &= \lim_{l\to 0}\left[\frac{-l}{x(x+l)}\cdot\frac{1}{l}\right] &&= \lim_{l\to 0}\frac{-1}{x(x+l)} \\ &= -\frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

Exemplo 3.5. A derivada da função $t(x) = \sqrt{x}$ é dada por

$$\begin{aligned} t^{'}(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{t(x+h)-t(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\right] = \lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h})^2-(\sqrt{x})^2}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

3.2.1 Limites

Até agora, temos abordado os limites apresentados nas noções de derivada e integral definida de forma extremamente intuitiva e superficial. Precisamos aprimorar o nosso entendimento a cerca desse objeto tão valioso.

Suponha que f seja uma função definida numa vizinhança de um ponto a, mas não necessariamente nesse ponto. Se existir um número real L, tal que $f(x)$ se aproxime arbitrariamente de L quando x se aproxima de a, então dizemos que L é o limite de $f(x)$ quando x tende a a e denotamos essa situação assim:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

ou

$$f(x) \to L \text{ quando } x \to a.$$

Mais precisamente, se, para todo $\epsilon > 0$ dado, existir $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x-a| < \delta \text{ implique em } |f(x)-L| < \epsilon,$$

então dizemos que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Para os nossos propósitos, bastará a compreensão intuitiva desse conceito. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 3.6. Considere $g(x) = 3x + 4$. Então, $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 10$. De fato, se aproximamos x de 2, a quantidade $g(x)$ se aproxima arbitrariamente de 10, como sugere a tabela abaixo:

x	$g(x) = 3x + 4$
1,9	3.1,9 + 4 = 9,7
1,99	3.1,99 + 4 = 9,97
1,999	3.1,999 + 4 = 9,997
2,001	3.2,001 + 4 = 10,003
2,01	3.2,01 + 4 = 10,03
2,1	3.2,1 + 4 = 10,3

Em particular, a função g está definida para $x = 2$ e $g(2) = 10$. Como veremos adiante, trata-se de uma importante coincidência.

Exemplo 3.7. Considere a função $t(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$. Estamos interessados em calcular $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$. Diferentemente do exemplo anterior, a função t não está definida em $x = 1$. Ainda assim, faz sentido pensar no limite citado, uma vez que estamos interessados no comportamento da função nas imediações desse ponto. Em geral, nesses casos, fazem-se necessárias manobras algébricas a fim de evitar-se indeterminações[2]. No caso em tela, podemos fatorar o numerador e efetuar uma simplicação.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1}(x + 1) = 2.$$

A simplificação só foi possível porque o x avaliado, apesar de muito próximo, é diferente de 1. No mais, procedemos como no exemplo anterior.

[2]As principais indeterminações que lidaremos serão $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\infty}$, 0^0, ∞^∞, 0^∞, ∞^0 e 1^∞.

Exemplo 3.8. Considere a função $h(x) = \frac{x}{|x|}$. Note que o número 0 não pertence ao domínio de h. Estamos interessados em determinar, caso exista, o

$$\lim_{x \to 0} h(x).$$

Procedendo como no Exemplo 3.6, podemos perceber que ao aproximarmos x de 0 pela esquerda, $h(x)$ torna-se -1.

x	$h(x) = \frac{x}{\lvert x \rvert}$
-0,1	-1
-0,01	-1
-0,001	-1

No entanto, se aproximarmos x de 0 pela direita, $h(x)$ torna-se 1.

x	$h(x) = \frac{x}{\lvert x \rvert}$
0,1	1
0,01	1
0,001	1

Essa situação impede a existência um número L para o qual o valor $h(x)$ se estabilize quando x se aproxima arbitrariamente de 0. Portanto, não existe o limite desejado.

Ao estabelecermos uma aproximação pelo caminho esquerdo de a, diremos ter aí o **limite lateral esquerdo** da função f, denotado por

$$\lim_{x \to a^-} f(x).$$

Analogamente, ao estabelecermos uma aproximação pelo caminho direito de a, teremos o **limite lateral direito** da função f, denotado por

$$\lim_{x \to a^+} f(x).$$

No Exemplo 3.8,

$$\lim_{x\to 0^-} h(x) = -1 \text{ e } \lim_{x\to 0^+} h(x) = 1.$$

Assim, se existir um número real L tal que

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L = \lim_{x\to a^+} f(x),$$

então, diremos que o

$$\lim_{x\to a} f(x) \text{ existe e é igual a } L.$$

Em particular, quando $L = f(a)$, dizemos que a função f é **contínua no ponto** $x = a$, e a é dito ser um **ponto de continuidade** do domínio de f. Se a função f for contínua em cada ponto do seu domínio, então, dizemos que f é **contínua**.

No Exemplo 3.6, a função g é contínua em $x = 2$, uma vez que

$$\lim_{x\to 2^-} g(x) = 10 = \lim_{x\to 2^+} g(x).$$

Como exemplos de funções contínuas, podemos citar as funções algébricas e transcendentais, discutidas no Capítulo 2.

3.2.2 Propriedades dos limites

Nesta seção, apresentamos as propriedades operatórias de limites, que, além de permitir acelerar os nossos procedimentos de cálculo, sustentarão as propriedades operatórias de derivadas e integrais que veremos adiante. São elas:

1. Se f é uma função contínua e a um ponto do seu domínio, então

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Em particular,

$$\lim_{x \to a} c = c,$$

para qualquer constante c, e

$$\lim_{x \to a} x = a.$$

2. Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$, então

   (a) $\lim\limits_{x \to a} (f + g)(x) = L + M$;

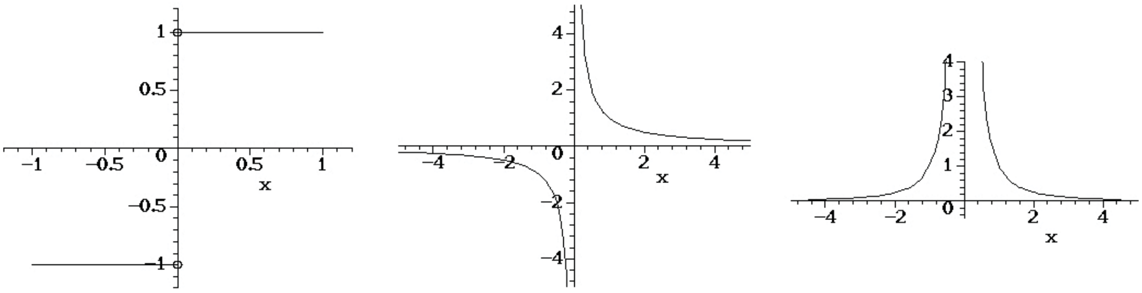
   (b) $\lim\limits_{x \to a} (f - g)(x) = L - M$;

   (c) $\lim\limits_{x \to a} (f \cdot g)(x) = L \cdot M$; e

   (d) $\lim\limits_{x \to a} \left(\dfrac{f}{g} \right)(x) = \dfrac{L}{M}$, desde que $M \neq 0$.

A Propriedade 1 é consequência imediata da definição de continuidade. A demonstração da Propriedade 2 pode ser encontrada em [2].

Exemplo 3.9. Para as funções $\frac{x}{|x|}$, $\frac{1}{x}$ e $\frac{1}{x^2}$ não existe limite quando $x \to 0$, como podemos ver nos gráficos a seguir:



3.2.3 Limites ao infinito

Em muitas situações, estamos interessados no comportamento da função f quando o valor absoluto de x é muito grande, isto é, quando $x \to \infty$ ou quando $x \to -\infty$.

Se existir um número real L com a propriedade de que $f(x)$ fica arbitrariamente próximo de L quando x cresce sem limitação, então, dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a infinito é L e representamos essa situação assim:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L.$$

De maneira completamente análoga, interpretamos a expressão

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = M,$$

e esses limites definem o que chamamos de **comportamento assintótico** de f.

Já a expressão

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

significa que o valor de $f(x)$ fica arbitrariamente grande quando x fica arbitrariamente grande.

Têm sentido análogo as expressões

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

3.2.4 O cálculo de derivadas

Como já mencionado, o processo de encontrar a derivada de uma função chama-se derivação (ou diferenciação). Já sabemos como calcular a derivada de uma função f a partir da definição, isto é, a partir da determinação do limite

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

ou, numa formulação equivalente[3], pondo $y = f(x)$,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Esse processo é, muitas vezes, demorado e engenhoso. A partir de agora, deduziremos formas mais imediatas de se obter a derivada de funções.

Regras de derivação

Todas as funções aqui consideradas são deriváveis, de domínio real, a menos de suas restrições óbvias.

1. A derivada da função constante é zero.

   Demonstração: Se $f(x) = c$, então, usando a definição,

$$f^{'}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0.$$

♦

2. Se n é um número inteiro positivo e $f(x) = x^n$, então $f^{'}(x) = nx^{n-1}$.

   Demonstração: Se $f(x) = x^n$, então, usando a definição,

$$\begin{aligned} f^{'}(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{[\binom{n}{0} x^n h^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} h^1 + \cdots + \binom{n}{n-1} x^1 h^{n-1} + \binom{n}{n} x^0 h^n] - x^n}{h} \end{aligned}$$

[3]Essa notação para a derivada da função $y = f(x)$ é devida à Leibniz.

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0} \frac{h[\binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \cdots + \binom{n}{n-1}x^1h^{n-2} + \binom{n}{n}h^{n-1}]}{h} \\
&= \binom{n}{1}x^{n-1} \\
&= nx^{n-1}.
\end{aligned}$$

♦

3. Se f é uma função qualquer e g uma função tal que $g = cf$, onde c é uma constante, então $g^{'} = cf^{'}$.

   Demonstração: De fato, usando a definição e propriedade operatória de limite,

$$\begin{aligned}
(cf)^{'}(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(cf)(x+h) - (cf)(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} c\,\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= c\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= cf^{'}(x).
\end{aligned}$$

♦

4. Se f e g são funções quaisquer e h é tal que $t = f + g$, então $t^{'} = f^{'} + g'$. Em outras palavras, a derivada da soma é a soma das derivadas.

   Demonstração: De fato, usando a definição e propriedade operatória de limite, obtemos

$$
\begin{aligned}
t'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-[f(x)+g(x)]}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)-f(x)]+[g(x+h)-g(x)]}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\
&= f'(x)+g'(x).
\end{aligned}
$$

♦

5. Se f e g são funções quaisquer e $t = fg$, então $t' = f'g + fg'$. Essa regra de derivação também é conhecida como Regra do produto.

   Demonstração: De fato, usando a definição, valendo-se de um artifício algébrico e de propriedades operatórias de limite, obtemos

$$
\begin{aligned}
t'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{(fg)(x+h)-(fg)(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left\{f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right\}\\
&= \lim_{h\to 0}f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+\lim_{h\to 0}g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}f(x+h)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+g(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= f(x)g'(x)+g(x)f'(x).
\end{aligned}
$$

♦

6. Se f e g são funções quaisquer e $t = \frac{f}{g}$, então $t' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$, sempre que $g(x) \neq 0$. Essa regra de derivação também é conhecida como Regra do quociente.

Demonstração: De fato, usando a definição, valendo-se de um artifício algébrico e de propriedades operatórias de limite, obtemos

$$
\begin{aligned}
t'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x+h) - \left(\frac{f}{g}\right)(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x+h)}{g(x)} + \frac{f(x+h)}{g(x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{f(x+h)\left[\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}\right] + \frac{1}{g(x)}[f(x+h) - f(x)]}{h} \right\} \\
&= \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{f(x+h)\left[\frac{g(x) - g(x+h)}{g(x+h)g(x)}\right] + \frac{1}{g(x)}[f(x+h) - f(x)]}{h} \right\} \\
&= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h)}{g(x+h)g(x)} \cdot \frac{g(x) - g(x+h)}{h}\right] + \\
&\quad \lim_{h \to 0} \left[\frac{1}{g(x)} \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)}{g(x+h)g(x)} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(x) - g(x+h)}{h} + \\
&\quad \frac{1}{g(x)} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{f(x)}{[g(x)]^2} \cdot [-g^{'}(x)] + \frac{1}{g(x)} f^{'}(x)$$

$$= \frac{f^{'}(x)g(x) - f(x)g^{'}(x)}{[g(x)]^2}$$

♦

7. Se $t = f \circ g$, onde f e g são funções quaisquer, então $t^{'} = (f^{'} \circ g) \cdot g^{'}$. Essa regra é conhecida como a Regra da cadeia[4].

   Demonstração: De fato, usando a definição de derivada, valendo-se de artifícios algébricos e de propriedades operatórias de limite, obtemos

$$\begin{aligned} t^{'}(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{(f \circ g)(x+h) - (f \circ g)(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{g(x+h) - g(x)} \right] \\ &= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \end{aligned}$$

[4]Chamando $y = f(u)$ e $u = g(x)$, a expressão

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

torna-se ma formulação alternativa para a Regra da cadeia, em termos da notação introduzida por Leibniz. Em termos intuitivos, podemos pensar em taxa de variação: se um carro é 3 vezes mais veloz que uma bicicleta que, por sua vez, é 2 vezes mais veloz do que um pedestre, então o carro é 3.2 vezes mais veloz que o pedestre. Ainda que a notação de Leibniz não signifique um quociente, ela facilita a internalização de um fato facilmente provado, que é a extensão da regra da cadeia para composições envolvendo mais de duas funções. Por exemplo, se $f = g \circ h \circ t$, então $f^{'} = g^{'}(h \circ t) \cdot h^{'}(t) \cdot t^{'}$. Essa expressão fica mais clara quando utilizamos a notação de Leibniz. Por ela, sendo $y = f(w)$, $w = g(u)$ e $u = t(x)$, então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dw} \cdot \frac{dw}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\
&= \lim_{l\to 0}\frac{f(u+l)-f(u)}{l}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\
&= f^{'}(u)\cdot g^{'}(x)\\
&= f^{'}(g(x))\cdot g^{'}(x)\\
&= (f^{'}\circ g)(x)\cdot g^{'}(x).
\end{aligned}
$$

♦

Vejamos, agora, alguns exemplos que ilustram a operacionalização dessas regras.

Exemplo 3.10. No Exemplo 3.3, calculamos a derivada da função $g(x) = x^3$ usando a definição. Como g é uma função potência de expoente $n = 3$, pela Regra 2, temos que $g^{'}(x) = 3x^2$.

Exemplo 3.11. Se $h(x) = 2x^3 + x^4 + 3x + 1$, então, articulando as regras 1, 2, 3 e 4, obtemos diretamente que $h^{'}(x) = 6x^2 + 4x^3 + 3$.

Exemplo 3.12. Seja $t(x) = (x + 2)^2$. Podemos calcular a derivada de t de diversas maneiras:

- expandindo o binômio, $t(x) = x^2 + 4x + 4$. Daí, $t^{'}(x) = 2x + 4$.
- podemos considerar $t = f \cdot f$, onde $f(x) = x + 2$. Assim, pela Regra do produto, temos

  $$t^{'}(x) = f^{'}(x)\cdot f(x) + f(x)\cdot f^{'}(x) = 1\cdot(x+2) + (x+2)\cdot 1 = 2(x+2) = 2x+4.$$

- podemos considerar $t = f \circ g$, onde $f(x) = x^2$ e $g(x) = x + 2$. Daí, usando a Regra da cadeia,

  $$t^{'}(x) = f^{'}(g(x))\cdot g^{'}(x) = 2\cdot(x+2)\cdot 1 = 2x+4.$$

Exemplo 3.13. Vamos usar a Regra do quociente para calcular a derivada da função $h(x) = \frac{1}{x}$. Basta observar que $h = \frac{f}{g}$, onde $f(x) = 1$ e $g(x) = x$. Assim:

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}.$$

A Regra do quociente nos permite estender a Regra 2 para n inteiro negativo. De fato, se $f(x) = x^n$, onde n é um inteiro negativo, então, podemos reescrever $f(x) = x^{-m}$, onde m é um inteiro positivo. Assim, $f(x) = \frac{1}{x^m}$, e, pela Regra do quociente,

$$f'(x) = \frac{0 \cdot x^m - 1 \cdot mx^{m-1}}{(x^m)^2} = \frac{-mx^{m-2}}{x^{2m}} = -mx^{-(m+1)} = nx^{n-1}.$$

Compare os exemplos 3.4 e 3.13 e perceba que os resultados coincidem!

É possível provar que essa regra é válida para qualquer n real. Aceitaremos, sem demonstração, esse fato.

Exemplo 3.14. No Exemplo 3.5, calculamos, usando a definição, a derivada da função $t(x) = \sqrt{x}$. Uma alternativa rápida para o seu cálculo é por meio da Regra 2, considerando a validade de sua extensão. Assim, podemos encarar como sendo $t(x) = x^{1/2}$ e, diretamente, obtemos $t'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$.

3.2.5 Derivadas de funções transcendentais elementares

Podemos obter a derivada de qualquer função, inclusive de funções transcendentais, utilizando a definição e algum artifício algébrico. No caso das funções transcendentais, faz-se necessária a compreensão de alguns limites especiais. Trataremos desse assunto com mais detalhes adiante.

Para o momento, vamos assumir que seja válida a Tabela 3.1. As regras de derivação que conhecemos permitem ampliar nossas possibilidades de cálculo.

$f(x)$	$f^{'}(x)$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$

Tabela 3.1: Tabela de derivação de algumas funções transcendentais.

Exemplo 3.15. A derivada da função $y = \operatorname{tg} x$, pode ser calculada assim: como

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x},$$

então, pela regra do quociente,

$$y^{'} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \left(\frac{1}{\cos x}\right)^2 = \sec^2 x.$$

Exemplo 3.16. Utilizando a regra da cadeia, a derivada da função $y = \operatorname{sen}(\ln x)$ é

$$y^{'} = \frac{\cos(\ln x)}{x}.$$

3.2.6 Esboço de gráficos de funções

Nesta seção, apresentaremos como fazer o uso das ferramentas até aqui apresentadas para melhorar a nossa compreensão sobre o comportamento do gráfico de uma função.

Até o momento, já fomos apresentados aos gráficos de algumas funções clássicas, que têm comportamentos bem intuitivos, fáceis de se reconhecer. A partir de agora, veremos como limites e derivadas podem nos auxiliar no esboço de funções quaisquer.

Dada uma função qualquer f, sempre que possível, devemos:

1. determinar os pontos críticos[5] de f e seus respectivos valores críticos;
2. estudar o sinal de $f^{'}$ e classificação dos pontos críticos;
3. determinar as raízes de f;
4. estudar o comportamento assintótico de f; e
5. estudar a concavidade de f através de $f^{''}$.

Crescimento, decrescimento, máximos e mínimos

Primeiramente, observe que uma caractectística de pontos de mínimo ou de máximo local é que a inclinação da reta que tangencia o gráfico da função nestes pontos é nula. Além disso, na região onde $f^{'}(x) > 0$, a inclinação da reta tangente é positiva, o que significa que a função f cresce. Analogamente, na região onde $f^{'}(x) < 0$, a função f decresce. Assim, um ponto x solução da equação $f^{'}(x) = 0$ será ponto de mínimo ou máximo local de f se a função $f^{'}$ alterna de sinal em x.

Exemplo 3.17. Para fixar ideias, considere a função $g(x) = 4 - x^2$. Já sabemos como é o seu gráfico, mas o usaremos para motivar nossos procedimentos. Note que $g^{'}(x) = -2x$. Como

$$g^{'}(x) = 0 \Leftrightarrow -2x = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

temos que $x = 0$ é um ponto crítico, candidato a ponto de máximo ou mínimo local. Como o gráfico de $g^{'}$ é uma reta decrescente, temos que

$$g^{'}(x) > 0 \text{ quando } x < 0$$

[5] Um ponto crítico de uma função é um ponto de mínimo ou máximo.

e

$$g'(x) < 0 \text{ quando } x > 0.$$

Isto significa que g' alterna de sinal em $x = 0$ de modo a tornar o $x = 0$ um ponto de máximo local. Como $g(0) = 4$, temos que o ponto $(0, 4)$ é um ponto de máximo local do gráfico de g. Outro importante aspecto da função g a ser observado é o seu nível zero:

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow 4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2,$$

isto é, as raízes de g são 2 e -2. Além disso, no infinito, essa função deve se comportar assim:

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} (4 - x^2) = -\infty$$

e

$$\lim_{x \to \infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} (4 - x^2) = -\infty.$$

Com essas informações, podemos intuir que a função g comporta-se como na figura abaixo:

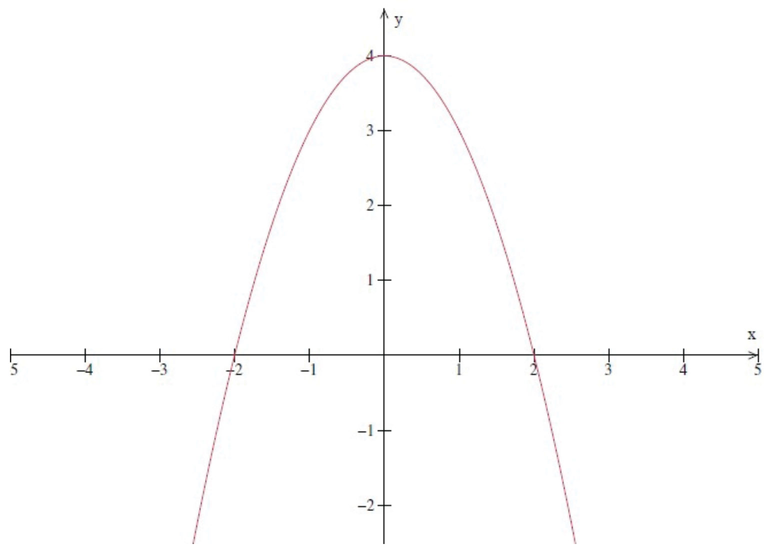
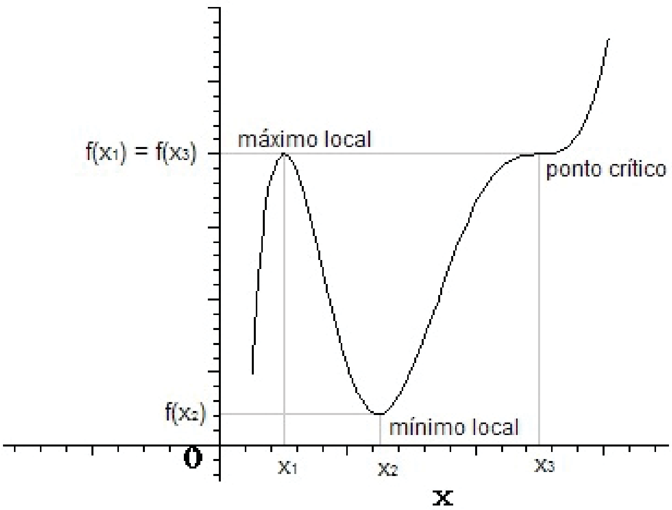


Figura 3.1: Gráfico da função $g(x) = 4 - x^2$.

De uma maneira geral, uma função f suficientemente suave crescerá nos intervalos em que $f'(x) > 0$ e decrescerá nos intervalos onde $f'(x) < 0$.



Assim, para encontrarmos os candidatos a pontos críticos de f, basta resolver a equação $f'(x) = 0$. Na figura, x_1, x_2 e x_3 são chamados de pontos críticos do domínio de f e $f(x_1)$, $f(x_2)$ e $f(x_3)$, valores críticos de f.

É importante compreender que um valor crítico não é necessariamente um valor de máximo ou de mínimo. Esses últimos, por sua vez, possuem a característica de, numa de suas vizinhanças, a derivada alterna de sinal. Isto é, se x_{max} é ponto de máximo, então, existe um $\epsilon > 0$ tal que $f'(x) < 0$ para todo $x \in (x_{max} - \epsilon, x_{max})$ e $f'(x) > 0$ para todo $x \in (x_{max}, x_{max} + \epsilon,)$; analogamente, se x_{min} é ponto de mínimo, então, existe um $\epsilon > 0$ tal que $f'(x) > 0$ para todo $x \in (x_{min} - \epsilon, x_{min})$ e $f'(x) < 0$ para todo $x \in (x_{min}, x_{min} + \epsilon)$.

Exemplo 3.18. Considere a função $h(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 12$. Temos que $h'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x + 1)(x - 2)$. Estudando o sinal da derivada, temos que h' é positiva em $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$ e negativa em $(-1, 2)$, como pode ser constatado na figura a seguir.

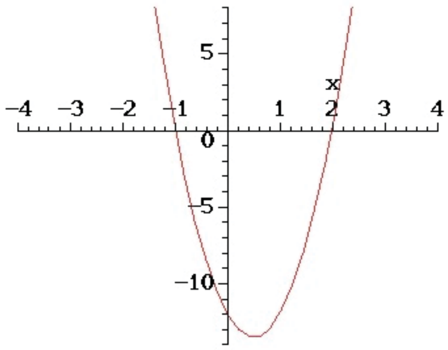


Figura 3.2: Gráfico da função $h^{'}(x) = 6(x+1)(x-2)$.

Assim, h cresce em $(-\infty,\ -1) \cup (2,\ \infty)$ e decresce em $(-1,\ 2)$. Como

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} (2x^3 - 3x^2 - 12x + 12) = \lim_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$$

e

$$\lim_{x\to\infty} h(x) == \lim_{x\to\infty} (2x^3 - 3x^2 - 12x + 12) = \lim_{x\to\infty} 2x^3 = \infty,$$

podemos esboçar o gráfico de h assim:

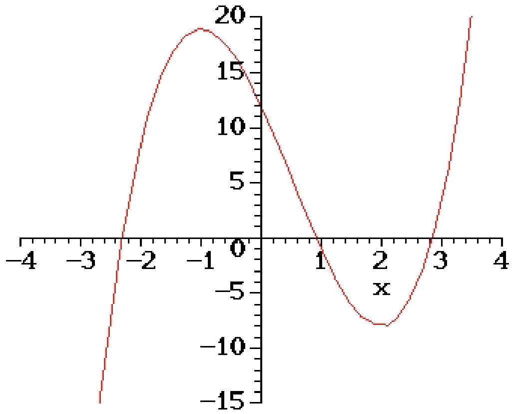


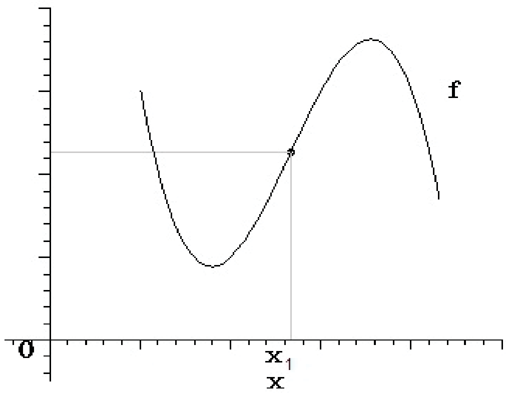
Figura 3.3: Gráfico da função $h(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 12$.

Concavidade e pontos de inflexão

Um ponto de inflexão é um ponto do domínio da função a partir do qual o seu gráfico modifica a concavidade. Para determiná-los, caso existam, faremos o estudo do sinal da segunda derivada da função.

Seja f uma função qualquer suficientemente suave[6]. Estamos interessados na variação instantânea da inclinação de f, isto é, na segunda derivada de f, a função f''. Nas regiões onde a inequação $f''(x) > 0$ é satisfeita indica que o coeficiente angular f' é crescente, enquanto que nas regiões onde a inequação $f''(x) < 0$ é satisfeita indica que o coeficiente angular f' é decrescente.

Assim, para calcular os candidatos a pontos de inflexão, basta resolver a equação $f''(x) = 0$. Uma raiz x_{inf} dessa equação será ponto de inflexão se o sinal de f'' alterna de sinal em x_{inf}, isto é, se existe $\epsilon > 0$ tal que $f''(x) < 0$ para todo $x \in (x_{inf} - \epsilon,\, x_{inf})$ e $f''(x) > 0$ para todo $x \in (x_{inf},\, x_{inf} + \epsilon)$, ou o contrário.



Exemplo 3.19. Considere a função $t(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x - 2$. Temos que $t''(x) = 12(x - 2)$. Além disso, $t''(x) = 0$ se, e somente se, $x = 2$. Como o gráfico de t'' é uma

[6]Essa hipótese, apesar de não ser clara, é para que possamos fazer os cálculos sem maiores preocupações.

reta crescente, ela alterna de sinal em $x = 2$. Logo $x = 2$ é um ponto de inflexão de t.

Exemplo 3.20. A função racional

$$y = \frac{x}{x^2 + 1}$$

tem como gráfico a curva

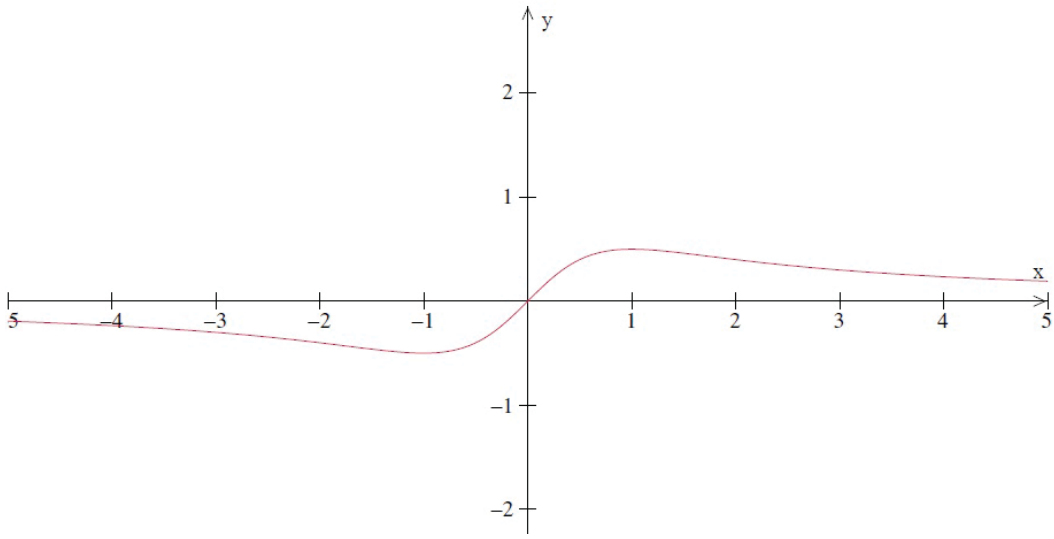


Figura 3.4: Gráfico da função $y = \frac{x}{x^2+1}$.

Note que

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Além disso,

$$y' < 0 \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow x > 1 \text{ ou } x < -1$$

e

$$y' > 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1.$$

Segue que -1 é ponto de mínimo e 1 é ponto de máximo. Como (faça as contas!)

$$y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ -\sqrt{3} \text{ ou} \sqrt{3},$$

é fácil ver que esses são os pontos de inflexão da função y. Finalmente, os limites

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x(x+\frac{1}{x})} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x+\frac{1}{x}} = 0$$

e

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x(x+\frac{1}{x})} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+\frac{1}{x}} = 0$$

estabelecem o comportamento assintótico de y. Esse conjunto de informações permite-nos intuir o comportamento sugerido pela Figura 3.4.

3.2.7 A Regra de L'Hôpital

Ao esboçarmos o gráfico de uma função, muitas vezes nos deparamos com rupturas e singularidades no gráfico. Ainda que estejamos lidando com uma função contínua, podem surgir assíntotas verticais ou horizontais que nos levam ao cálculo de certos limites cujos resultados não sejam tão óbvios.

Considere, por exemplo, a função f dada por

$$f(x) = \frac{\ln x}{x-1}.$$

É fácil ver que f é uma função contínua de domínio $\mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$. Logo, as retas $x = 0$ e $x = 1$ são candidatas a assíntotas verticais. Para compreender o comportamento assintótico de f nessas regiões, precisamos calcular os seguintes limites

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\ln x}{x-1}, \quad \lim_{x\to1^-} \frac{\ln x}{x-1} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to1^+} \frac{\ln x}{x-1}.$$

Nesse esforço, facilmente percebemos que o primeiro limite é ∞, o que significa que na vizinhança a direita do 0 o gráfico da função decresce do infinito. Logo, a reta $x = 0$ é de fato uma assíntota vertical. Entretanto, no cálculo dos dois outros limites, observamos que surge a forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$ e, no duelo entre numerador e denominador, não é imediato perceber o que acontece.

Por outro lado, em busca do comportamento da função f quando x assume valores extremamente grandes, devemos calcular o seguinte limite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x-1}.$$

Novamente nos deparamos com uma indeterminação, agora do tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Para solucionar problemas desse tipo, apresentamos a seguir a Regra de L'Hôpital[7].

Teorema 3.1 (Regra de L'Hôpital)**.** *Sejam f e g funções diferenciáveis e $g'(x) \neq 0$ na vizinhança de a (exceto possivelmente em a). Suponha que*

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad e \quad \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

ou que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \quad e \quad \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty.$$

Então,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

se o último limite existir, ou é ∞ ou $-\infty$.

Para desenvolvermos uma intuição a respeito da validade desse teorema, considere a situação em que $f(a) = g(a) = 0$, f e g têm deridadas em $x = a$ e $g'(a) \neq 0$. Nessa situação, temos que

[7] Essa denominação é uma homenagem ao nobre francês marquês de L'Hôpital (1661-1704), mas a regra foi descoberta pelo seu mentor, o matemático suíço John Bernoulli (1667-1748).

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} \xrightarrow{x \to a} \frac{f'(a)}{g'(a)},$$

isto é,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

A prova completa desse resultado pode ser encontrada em [3].

O resultado permanece válido nas situações em que $a = \pm\infty$ ou quando se considera apenas a vizinhança à direita ou à esquerda de a (a^+ ou a^-).

No caso particular da função f tratada no início dessa subseção, aplicando-se a Regra de L'Hôpital, os limites ficam

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\ln x}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1,$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{\ln x}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$$

e

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

Pela análise desses limites, concluímos que a reta $x = 1$ não é assíntota vertical e a reta $y = 0$ é assíntota horizontal. Como exercício, faça o esboço do gráfico da função f!

3.2.8 Taxas de variação e aplicações

O cálculo de derivadas está intimamente relacionado com o estudo da taxa de variação instantânea de uma grandeza quando comparada a outra grandeza relacionada com a primeira através de uma lei.

Por sua generalidade, esse conceito se aplica a inúmeras situações que aparecem nas mais variadas áreas do conhecimento e atuação humana. A seguir, damos alguns exemplos nos quais é possível aplicar o conceito derivada no contexto de outras ciências.

Velocidade e aceleração

A cinemática é o ramo da física que estuda o movimento dos corpos. Veremos que as derivadas de primeira e segunda ordem podem ser utilizada para obtenção das funções velocidade e aceleração, respectivamente, quando é conhecida a função horária, que dá a posição de um objeto ao longo do tempo.

Considere um corpo que se move ao longo do tempo segundo uma função horária s, que dá a posição do corpo num instante qualquer do tempo. Dado um incremento de tempo h, a velocidade média v_m desenvolvida pelo corpo no intervalo de tempo $[t, t+h]$ pode ser calculada assim:

$$v_m(t) = \frac{s(t+h) - s(t)}{t}.$$

A velocidade média não dá a informação precisa da velocidade desenvolvida pelo corpo em um momento específico de tempo dentro do intervalo observado. É possível capturar essa informação a partir do cálculo da velocidade média em intervalos cada vez menores de tempo, que contenham o instante de tempo desejado. A **velocidade instantânea** $v(t)$, calculada num instante de tempo t, surgirá ao se avaliar a velocidade média em intervalos de amplitude pequena na situação limite. Assim,

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{t} = s^{'}(t),$$

ou seja, a função velocidade (instantânea) é a primeira derivada da função horária da posição do corpo.

O conceito de aceleração está relacionado com a variação da velocidade no tempo. Fazendo uma analogia à situação anterior, podemos pensar na aceleração média $a_m(t)$ ocorrida ao final de um espaçamento no tempo de amplitude h, ou seja, ao final do intervalo de tempo $[t, t+h]$:

$$a_m(t) = \frac{v(t+h) - v(t)}{t}.$$

A **aceleração instantânea** $a(t)$, calculada num instante de tempo t, será a primeira derivada da função velocidade,

$$a(t) = \lim_{h \to 0} \frac{v(t+h) - v(t)}{t} = v^{'}(t) = s^{''}(t),$$

ou ainda, a segunda derivada da função horária da posição.

Exemplo 3.21. Uma ruptura no tanque de um navio tem causado um derramamento de óleo no mar que se espalha de forma circular num raio que cresce a uma taxa de 2 m/h. Com que velocidade a área do derramamento estará crescendo no instante em que o raio atingir 60 metros?

Solução: Queremos calcular a variação instantânea da área com relação ao tempo, isto é, $\frac{dA}{dt}$ ou, simplesmente, $A^{'}(t)$. Desde que a área do derramamento é circular, ela pode ser expressa em função do raio r: $A(r) = \pi r^2$. Sabemos que $\frac{dr}{dt} = 2$ m/h. Assim, podemos calcular $A^{'}(t)$ através da regra da cadeia:

$$A^{'}(t) = \frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = 2\pi r \cdot 2 = 4\pi r.$$

Portanto, a velocidade com que a área estará crescendo no instante de tempo t_0 em que o raio atingir 60 metros será

$$A^{'}(t_0) = 4\pi \cdot 60 = 240\pi \text{ m}^2/\text{h}.$$

Aplicação em economia

Seja $C(x)$ o custo de produção de x unidades de um certo produto. A **função custo** C é de grande interesse em economia, bem como a **função custo médio** c, dada por

$$c(x) = \frac{C(x)}{x},$$

e a **custo marginal**, que fornece a variação instantânea de C em relação a x. Em outras palavras, a função custo marginal é a função $C^{'}$, a derivada da função C em relação a x.

Exemplo 3.22. Suponha que uma companhia estimou que o custo C (em dólares) de produção de x itens é dado por

$$C(x) = 20.000 + 6x + 0,02x^2.$$

Então, a função custo marginal é

$$C^{'}(x) = 6 + 0,04x.$$

Assim, o custo marginal no nível de produção de 5.000 itens é

$$C^{'}(500) = 6 + 0,04 \cdot 500 = \$26/\text{item}.$$

Essa informação dá a taxa segundo a qual os custos estão crescendo em relação ao nível de produção quando $x = 500$ e prediz o custo dos 501 primeiros itens.

Há outras funções de interesse dos economistas que envolvem taxas de variação instantânea. São exemplos as funções **demanda marginal**, **renda marginal** e **lucro marginal**, que são as derivadas das funções demanda, renda e lucro, respectivamente.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

Exercícios

1. Calcule os seguintes limites:

   a) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$;

   b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{sen} 5x}$;

   c) $\lim_{x\to 1} \dfrac{4x^3 - 5x + 1}{\ln x}$;

   d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{1 - \cos \pi x}$;

   e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x^3)}{\operatorname{sen}^3 x}$;

   f) $\lim_{x\to \infty} \dfrac{18x^3}{3 + x^2 - 6x^3}$;

   g) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{tg} x}{1 + \sec x}$;

   h) $\lim_{x\to \infty} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$;

   i) $\lim_{x\to \infty} \operatorname{sen}(1 + x^{100})^{\frac{1}{x}}$.

2. Um ponto material se movimenta em uma trajetória retilínea de acordo com a lei

$$s(t) = 3t - 3t^3$$

(no SI). Qual a velocidade instantânea desse ponto material nos instantes 0 s, 1 s e 2 s?

3. Um ponto material se movimenta sobre uma trajetória retilínea obedecendo à função horária

$$s(t) = 2t^3 - 4t + 5$$

(no SI). Determine:

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

a) a função horária da velocidade;

b) a velocidade escalar do ponto material no instante t = 3 s;

c) a velocidade escalar material do ponto material;

d) a função horária da aceleração;

e) a aceleração escalar da partícula no instante t = 5 s;

f) a aceleração escalar inicial da partícula.

4. Uma pedra é lançada verticalmente para cima do alto de um morro de 18 metros de altura, com velocidade inicial de 20 m/s. A distância s, em metros, dessa pedra em relação ao topo do morro após t segundos é dada pela função horária
$$s(t) = 20t - 5t^2.$$
Calcule a máxima altura que a pedra atinge em relação ao solo.

5. A posição de uma partícula que se move em linha reta é dada por
$$s(t) = 4t^3 - 6t + 1$$
(no SI). Determine:

   a) o tempo gasto para a partícula alcançar uma velocidade escalar de 186 m/s a partir de sua condição inicial em t = 0;

   b) a aceleração escalar da partícula no instante 0,5 s;

   c) a aceleração escalar da partícula quando a velocidade é de $v = 294$ m/s.

6. Dada a função
$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 4x + 12,$$
determine:

   a) o ponto em que o gráfico corta o eixo y;

b) os pontos em que a reta tangente ao gráfico de f é paralela ao eixo x;

c) um esboço do gráfico da f';

d) a região do domínio onde f cresce;

e) um esboço do gráfico de f.

7. Em cada caso, determine os pontos críticos das funções abaixo e classifique-os como ponto de mínimo, ponto de máximo ou ponto de inflexão.

a) $f(x) = x^2 - 6x + 8$

b) $g(x) = 3x - x^3$

c) $h(x) = 3x^4 - 12x^2 + 5$

8. Com uma folha retangular de cartolina, deseja-se construir uma caixa sem tampa, retirando-se das extremidades quadrados de lado x. As dimensões da folha são 60 cm e 40 cm.

a) Qual deve ser o valor de x para que o volume da caixa seja o volume máximo?

b) Qual é o volume máximo da caixa?

9. Numa indústria, o gasto para se produzir x produtos é dado, em reais, por

$$g(x) = \frac{x^2}{4} + 35x + 25,$$

e o preço de venda de cada produto é dado, em reais, por

$$p(x) = 50 - \frac{x^2}{2}.$$

a) Qual deve ser a produção diária para se obter um lucro máximo na venda de x produtos?

b) Qual o custo unitário de cada produto para se ter um lucro máximo?

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

10. Determine o raio da base de uma lata de refrigerante cilíndrica de volume 350 ml de modo que o material gasto na confecção da lata seja mínimo. (Dado: 1 ml equivale a 1 cm^3)

11. Um agricultor deseja construir um reservatório cilíndrico, fechado em cima, com volume de 6.280 m^3. Sabendo que o preço da chapa de aço é de R$ 50,00 o metro quadrado, determine:

    a) suas dimensões de forma que o custo seja mínimo;

    b) o custo mínimo.

12. Em cada um dos seguintes itens, esboce o gráfico de uma função com todas as propriedades enunciadas.

    a) $f(0) = 2$, $f(2) = 0$, $f'(0) = f'(2) = 0$, $f'(x) > 0$ para $|x-1| > 1$, $f'(x) < 0$ para $|x-1| < 1$, $f''(x) < 0$ para $x < 1$, $f''(x) > 0$ para $x > 1$.

    b) $f(0) = 0$, $f(2) = f(-2) = 1$, $f'(0) = 0$, $f'(x) > 0$ para $x > 0$, $f'(x) < 0$ para $x < 0$, $f''(x) > 0$ para $|x| < 2$, $f''(x) < 0$ para $|x| > 2$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$.

13. Uma janela tem a forma de um retângulo com um semicírculo no topo. Se o perímetro total é fixo, determine as proporções da janela (isto é, a razão entre a altura da janela e a base) que permitirá máxima iluminação.

14. Um tanque em forma de cone com o vértice para baixo mede 12 m de altura e tem no topo um diâmetro de 12 m. Bombeia-se água à taxa de 4 m^3/min. Ache a taxa com que o nível da água sobe (a) quando a água tem 2 m de profundidade e (b) quando a água tem 8 m de profundidade.

15. De um petroleiro quebrado vaza um grande volume V de óleo num mar calmo. Após a turbulência inicial ter acabado, o petróleo se expande num contorno circular de raio r e espessura uniforme h, onde r cresce e h decresce de modo

determinado pela viscosidade e flutuabilidade do óleo. Experiências de laboratório sugerem que a espessura é inversamente proporcional à raiz quadrada do tempo decorrido: $h = \frac{c}{\sqrt{t}}$. Mostre que a taxa $\frac{dr}{dt}$ com que o petróleo se expande é inversamente proporcional a $t^3 4$.

16. Determine a solução geral de cada uma das seguintes equações diferenciais.

    a) $\dfrac{dy}{dx} = 6x^2 + 4x - 5$

    b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x^2} + x$

    c) $\dfrac{dy}{dx} = (3x+1)^3$

17. Determine a solução particular de cada uma das seguintes equações diferenciais que satisfaz a condição inicial dada:

    a) $\dfrac{dy}{dx} = 10x + 5,\; y = 15$ quando $x = 0$;

    b) $\dfrac{dy}{dx} = 2 - x^2,\; y = 0$ quando $x = 0$.

18. Utilize a definição de derivadas para obter a derivada da função $f(x) = x^2 + 2x$.

19. Utilize regras de derivação para obter a derivada das seguintes funções.

    a) $y = \text{cotg } x$

    b) $f(x) = e^x \text{ sen } x$

    c) $g(x) = \text{sen}(x^2)$

    d) $h(x) = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$

    e) $r(x) = e^x + \cos x$

    f) $s(x) = \dfrac{1}{\cos x}$

    h) $t(x) = x^2 + \sqrt{x} - 1$

20. Considere a função real, a valores reais, definidas por $g(x) = 2 \text{ sen } x$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

a) Esboce o gráfico da função g.

b) Determine a equação da reta que tangencia à curva g no ponto de abscissa $x = \pi$.

c) Resolva a equação $g^{'}(x) = 2$, no intervalo de $[0, 2\pi]$.

d) Calcule $g^{''}(\frac{\pi}{4})$.

21. Considere a função racional dada pela expressão

$$f(x) = \frac{1}{1 - x^2}.$$

a) Determine o seu domínio.

b) Determine, caso existam, suas raízes.

c) Calcule:

c_1) $\lim_{x \to \infty} f(x)$;

c_2) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$;

c_3) $\lim_{x \to -1^-} f(x)$;

c_4) $\lim_{x \to -1^+} f(x)$;

c_5) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$;

c_6) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$.

d) Determine os intervalos onde f cresce e decresce.

e) Faça um esboço do gráfico de f.

f) Faça um estudo da concavidade de f.

22. Faça o estudo completo da função $y = \dfrac{2x^2}{x^2 - 1}$, culminando num esboço do seu gráfico.

23. Faça o estudo completo da função $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$, culminando num esboço do seu gráfico.

3.3 Integrais indefinidas

Na seção anterior, vimos como calcular a derivada de uma função dada. Agora, vamos pensar no problema inverso: como solucionar uma equação diferencial da forma

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x),$$

onde a função f é conhecida. Em outras palavras, queremos investigar a existência de alguma função F que, quando diferenciada, resulta na função f.

Para fixar ideias, considere a equação diferencial

$$\frac{d}{dx}F(x) = \cos x. \tag{3.1}$$

Não é preciso muita imaginação para concluir que a função sen x é uma solução para a Equação (3.1). A questão é: existem outras soluções? A resposta é sim, existem infinitas outras. Todavia, todas elas pertencem a uma mesma família de funções, no caso, a família de funções que diferem entre si por uma constante.

Proposição 3.1. *Se F_1 e F_2 são duas funções tendo a mesma derivada f, num certo intervalo I, então F_1 difere de F_2 por uma constante, isto é, existe uma constante c tal que*

$$F_1(x) = F_2(x) + c$$

para todo $x \in I$.

Demonstração: Considere a função H, definida por

$$H(x) = F_1(x) - F_2(x),$$

para cada $x \in I$. Então,

$$\frac{d}{dx}H(x) = \frac{d}{dx}F_1(x) - \frac{d}{dx}F_2(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Logo, $H(x) = c$, para todo $x \in I$, onde c é uma constante. Ou seja,

$$F_1(x) = F_2(x) + c.$$

♦

Definição 3.1. Dada uma função f, se existir outra função F tal que

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

para todo $x \in D$, onde D é o domínio de f, então, dizemos que F é uma **antiderivada** (ou primitiva) de f, e o processo de se achar F é chamado de **antiderivação** (ou primitivação).

Analisando a definição acima e a Proposição 3.1, vemos que f não precisa ter antiderivada única, mas se pudermos encontrar uma antiderivada F de f, todas as outras pertencerão à mesma família de F, isto é, diferirão de F por uma constante.

Por razões históricas, uma antiderivada de f é usualmente chamada de **integral indefinida** de f, e o processo de antiderivação é chamado de **integração**. Assim, o processo de se encontrar uma antiderivada é o mesmo que resolver uma integral, como sugere a notação:

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x) \Leftrightarrow \int f(x)dx = F(x) + c. \tag{3.2}$$

Lê-se a expressão do lado direito da equivalência (3.2) como "a integral indefinida da função f com respeito a x é a família de funções do tipo $F + c$, onde c é uma constante"; o símbolo $\int dx$ simboliza o processo de integração e a função f é dita ser o **integrando** da integral.

Exemplo 3.23. Como vimos, $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$. Então, pela equivalência (3.2), temos que $\int nx^{n-1}dx = x^n + c$, onde c é uma constante. Em particular, se $g(x) = 3x^2$, então

$\int 3x^2dx = x^3 + c$, onde c é uma constante. Em outras palavras, estamos pensando em que funções são tais que, quando derivadas, resultam na função integrando.

3.3.1 Técnicas de antiderivação

Nesta subseção, discutiremos técnicas para se calcular a integral indefinida de uma função dada, além das propriedades operatórias da antiderivação. O exemplo abaixo sugere uma regra fácil para se calcular integrais de funções do tipo potência.

Exemplo 3.24. Considere n um número natural qualquer. Mentalmente, percebemos que

- $\int dx = \int 1dx = \int x^0dx = x + c$;
- $\int xdx = \dfrac{x^2}{2} + c$;
- $\int x^2dx = \dfrac{x^3}{3} + c$;
- $\int x^3dx = \dfrac{x^4}{4} + c$;

e, em geral,

- $\int x^ndx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$.

Neste exemplo, usamos o mesmo raciocínio utilizado no Exemplo 3.23, com pequenas modificações. Naquele exemplo, nos remetemos à regra de derivação

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

que, como já havíamos observado, é válida para qualquer n real. Daí, há de se intuir que a regra sugerida pelo Exemplo 3.24 valha também para n não necessariamente natural. De fato, essa regra pode ser generalizada, isto é,

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \text{ qualquer que seja } n \neq -1.$$

A restrição[8] $n \neq -1$ é necessária para que a fração esteja bem definida.

Exemplo 3.25.

$$\int \sqrt{x} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{2}{3} x^{3/2} + c.$$

Regras de antiderivação

Afim de ampliarmos nossas possibilidades de cálculo, apresentamos a seguir as principais regras de antiderivação. As duas primeiras são inteiramente análogas às regras de derivação e as duas últimas relacionam os dois operadores: derivada e antiderivada. Nelas, f e g são funções quaisquer munidas de toda a regularidade necessária para que essas operações façam sentido e c é um a constante arbitrária. Então:

1. $\int cf(x)dx = c \int f(x)dx$;
2. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$;
3. $\dfrac{d}{dx} \displaystyle\int f(x)dx = f(x)$; e
4. $\displaystyle\int \frac{d}{dx} f(x)dx = f(x) + c$.

Neste ponto, já somos capazes de integrar algumas funções algébricas que se resumem a combinações lineares de funções potência.

[8]Quando $n = -1$, aceitaremos $\int x^{-1}dx$ como sendo a função $lnx + c$, onde c é uma constante.

Exemplo 3.26.

$$\begin{aligned}
\int (3x^4 + 6x^2)dx &= \int 3x^4 dx + \int 6x^2 dx \\
&= 3\int x^4 dx + 6\int x^2 dx \\
&= 3\left(\frac{x^5}{5} + c_1\right) + 6\left(\frac{x^3}{3} + c_2\right) \\
&= \frac{3}{5}x^5 + 2x^3 + c,
\end{aligned}$$

onde $c = 3c_1 + 6c_2$ é uma constante.

Exemplo 3.27.

$$\begin{aligned}
\int \left(\frac{5\sqrt[3]{x} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt{x}}\right) dx &= \int \left(5\frac{x^{1/3}}{x^{1/2}} - 2\frac{x^{-1/3}}{x^{1/2}}\right) dx \\
&= 5\int x^{-1/6} dx - 2\int x^{-5/6} dx \\
&= 5\left(\frac{x^{5/6}}{5/6} + c_1\right) - 2\left(\frac{x^1/6}{1/6} + c_2\right) \\
&= 6x^{5/6} - 12x^{1/6} + c,
\end{aligned}$$

onde $c = 5c_1 - 2c_2$ é uma constante.

Algumas técnicas de antiderivação

Aprenderemos, agora, duas importantes técnicas[9] de antiderivação: a integração por substituição e a integração por partes. Salientamos que nem sempre é possível aplicá-las, pois elas permitem resolver um número limitado de casos. Como toda técnica, sua utilização eficiente depende de treino e habilidade.

[9]Existem outras técnicas de antiderivação que não serão abordadas aqui, como, por exemplo, a substituição trigonométrica e o método das frações parciais.

1. Integração por substituição

   A técnica de integração por substituição consiste em se fazer uma mudança na variável do problema afim de se reduzir o processo de antiderivação a um dos casos já conhecidos. Essa técnica permite resolver integrais da forma

$$\int [(g \circ f)(x) f^{'}(x)] dx, \tag{3.3}$$

   e funciona sempre que soubermos calcular uma antiderivada G de g e a derivada $f^{'}$ de f. Para isso, chame $u = f(x)$ (essa é a mudanda de variável!). Como a nova variável u é uma função da variável x, calcule a sua derivada $\frac{du}{dx}$ e substitua na integral (3.3). Substituindo, temos:

$$\int [(g \circ f)(x) f^{'}(x)] dx = \int g(u) du = G(u) + c = G(f(x)) + c.$$

   Exemplo 3.28. Para calcular

$$\int [(3x^2 - 1)^{1/3} 4x] dx,$$

   procedemos assim:

$$u = 3x^2 - 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 6x \Rightarrow xdx = \frac{du}{6}.$$

   Substituindo, obtemos

$$\int [(3x^2 - 1)^{1/3} 4x] dx = \int \frac{2}{3} u^{1/3} du = \frac{2}{3} \int u^{1/3} du = \frac{2}{3} \frac{u^{4/3}}{4/3} = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)^{4/3} + c.$$

2. Integração por partes

   A técnica de integração por partes, que apresentamos a seguir, está fortemente relacionada com a regra de derivação do produto de duas funções. Dadas duas funções f e g diferenciáveis, recordemos que

$$\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = f(x) \cdot g^{'}(x) + f^{'}(x) \cdot g(x). \tag{3.4}$$

Podemos reescrever a regra do produto, dada em (3.4), em termos de integrais, assim:

$$\int \Big[f(x) \cdot g^{'}(x) + f^{'}(x) \cdot g(x)\Big]\, dx = f(x) \cdot g(x).$$

Finalmente, manipulando a equação acima, obtemos

$$\int f(x) \cdot g^{'}(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int g(x) \cdot f^{'}(x)dx, \tag{3.5}$$

que é conhecida como a **fórmula da integração por partes**.

Exemplo 3.29. Para encontrar a integral indefinida da função $h(x) = x$ sen x, isto é, para encontrar a

$$\int x \;\operatorname{sen} x \, dx,$$

observamos, inicialmente, que o integrando é um produto de duas funções, o que nos motiva a aplicar a fórmula da integração por partes.

Depois disso, temos que escolher adequadamente qual das funções desempenhará qual papel, ou seja, devemos escolher qual delas será vista como uma derivada. A experiência sugere que se escolha a mais facilmente integrável para exercer esse papel, visto que o resultado depende de sua antiderivada.

Façamos a seguinte escolha:

$$f(x) = x \;\text{ e }\; g^{'}(x) = \operatorname{sen} x.$$

A partir desta escolha, sabemos que

$$f^{'}(x) = 1 \;\text{ e }\; g(x) = -\cos x.$$

Assim, usando a expressão (3.5), obtemos

$$\begin{aligned}\int h(x)dx &= x(-\cos x) - \int (-\cos x)dx \\ &= -x\cos x + \int \cos x dx \\ &= -x\cos x + \operatorname{sen} x + c,\end{aligned}$$

onde c é uma constante.

3.4 Integrais definidas e Teorema Fundamental do Cálculo

No início do nosso estudo sobre limites, formulamos uma definição um tanto quanto complicada para o que chamamos de integral definida de uma função contínua f no intervalo $[a, b]$, denotada por

$$\int_a^b f(x)dx.$$

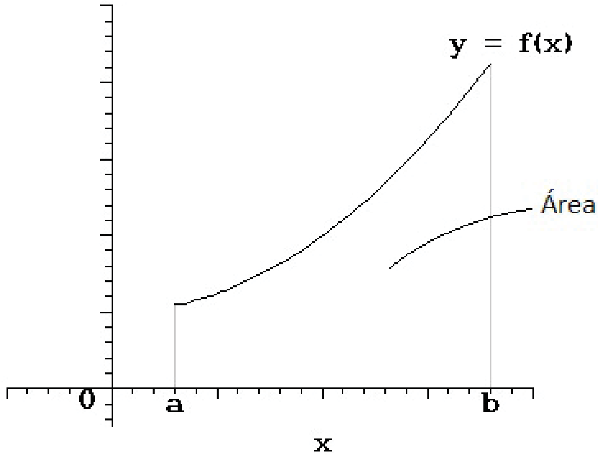
Segundo aquela formulação,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\mathrm{mx}\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k, \tag{3.6}$$

onde x_k^* é um ponto do domínio de f pertencente ao subintervalo de comprimento Δx_k.

O propósito daquela formulação, sintetizada na Equação (3.6), foi apresentar a natureza essencial do conceito de integral. A partir de agora, apresentaremos uma ferramente mais eficiente e poderosa de se resolver integrais definidas.

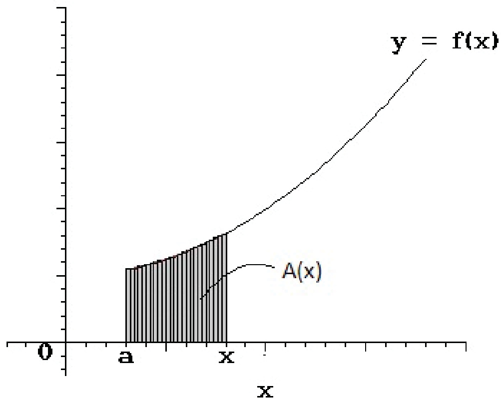
Considere $y = f(x)$ uma função contínua e positiva, definida sobre o intervalo $[a, b]$.



Estamos interessados em calcular a área da figura sob o gráfico de f, compreendida entre o eixo x e as retas $x = a$ e $x = b$, isto é,

$$\int_a^b f(x)dx = A.$$

Para isso, considere uma função A, que calcula área sob a função f, no primeiro quadrante de a até um ponto $x \in [a, b]$.



Claramente, $A(a)$ é igual a zero e $A(b)$ corresponde à área desejada da figura inicial. Nossa meta é achar uma fórmula explícita para A em função de x e, daí, tomar $x = b$.

Primeiramente, observe que

$$\frac{d}{dx}A = f, \tag{3.7}$$

isto é, a taxa de variação da área A com respeito a x é igual ao comprimento da borda superior da região. De fato, pela definição de derivada, temos que

$$\frac{d}{dx}A(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A(x + \Delta x) - A(x)}{\Delta x} = (*)$$

Intuitivamente, podemos imaginar a existência de um ponto $\overline{x} \in (x, x + \Delta x)$ de tal sorte que $A(x + \Delta x) - A(x) = \Delta x.f(\overline{x})$, isto é, de maneira que a área da região do primeiro quadrante determinada por f e entre os pontos x e $x + \Delta x$ seja igual à área de um retângulo de base Δx e altura $f(\overline{x})$. Matematicamente, essa intuição é confirmada pelo Teorema do valor intermediário[10]. Por essa razão, podemos reescrever

$$(*) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\overline{x}\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\overline{x}) = f(x).$$

Da Expressão (3.7), temos que A é uma antiderivada da função f. Isto é,

$$A(x) = F(x) + c,$$

qualquer que seja F uma antiderivada de f, para alguma constante particular c. Como $A(0) = 0$, temos que $c = -F(a)$. Daí,

$$A(x) = F(x) - F(a).$$

[10]Consulte [3].

Pelo exposto acima, podemos concluir que

$$\int_a^b f(x)dx = A(b) = F(b) - F(a),$$

onde F é uma antiderivada de f. E isso é exatamente o que estabelece o Teorema Fundamental do Cálculo:

Teorema 3.2 (Teorema Fundamental do Cálculo). *Se f é uma função contínua definida sobre o intervalo fechado $[a, b]$ e se F é uma antiderivada de f, então*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Esse teorema estabelece a conexão entre os dois problemas fundamentais do Cálculo apresentados anteriormente. Essa conexão se dá na medida em que permite resolver o problema da área por meio do cálculo inverso de derivadas.

Com o objetivo de simplificar a exposição, adotaremos a notação

$$F(x)|_a^b := F(b) - F(a).$$

Exemplo 3.30. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\int_0^4 x^4 dx = \left.\frac{x^5}{5}\right|_0^4 = \frac{1}{5}(4^5 - 0^5) = \frac{32}{5}.$$

3.4.1 Propriedades da integral definida

Na construção do conceito de integrais definidas, duas hipóteses foram largamente utilizadas:

i) $f \geq 0$ em todo o intervalo $[a, b]$; e

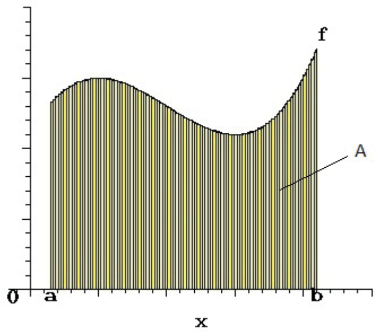
ii) $a < b$.

Isso foi feito para garantir a associação daquele conceito com a área de uma figura geométrica.

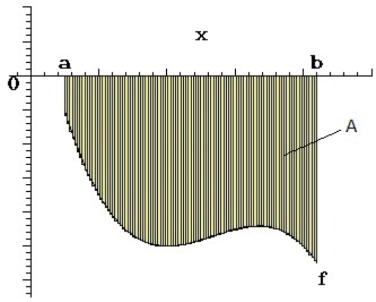
Entretanto, a expressão da integral definida por meio de um limite de somas, como na Equação (3.6), é independente dessas hipóteses. Isso significa que o conceito de integral definida não exige tais suposições. Assim, devemos tomar as devidas precauções antes de interpretar o resultado de uma integral definida como sendo a medida da área de uma figura.

De qualquer maneira, podemos utilizar integrais para calcular áreas desde que façamos pequenos ajustes, como sugerem as figuras abaixo.

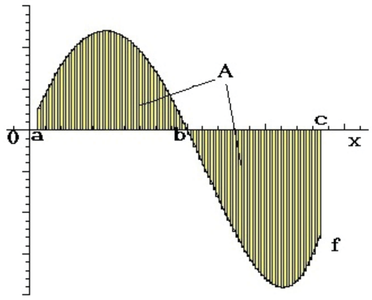
$$A = \int_a^b f(x)dx$$



$$A = -\int_a^b f(x)dx$$



$$A = \int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx$$



Em geral, valem as seguintes propriedades para integrais definidas:

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$. Em particular, $\int_a^a f(x)dx = 0$;
2. Se $a < b < c$, então $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$;
3. Se c é uma constante não nula, então $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$;
4. $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$; e
5. Se $f \leq g$ sobre $[a, b]$, então $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

As provas dessas propriedades são diretas e não serão feitas aqui.

3.4.2 Algumas aplicações

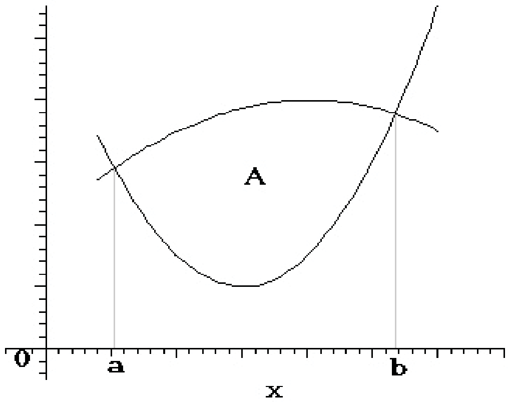
Cálculo de área entre curvas

No início do capítulo, o problema 2 nos trouxe uma forma de calcular a área determinada por um gráfico de uma função no intervalo $[a, b]$, as retas $x = a$, $x = b$ e o eixo x. Para uma função $f(x)$ contínua e não negativa no intervalo $[a, b]$, a área descrita acima é dada por

$$A = \int_a^b f(x)dx.$$

Agora vamos considerar a área entres os gráficos de duas funções. Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções contínuas tais que $f(x) \geq g(x) \geq 0$ no intervalo $[a, b]$. Então, podemos calcular a área da região limitada pelos gráficos de f, g, $x = a$ e $x = b$ subtraindo a área da região sob gráfico de g (limitante inferior) da área da região sob o gráfico de f (limitante superior). Assim, temos

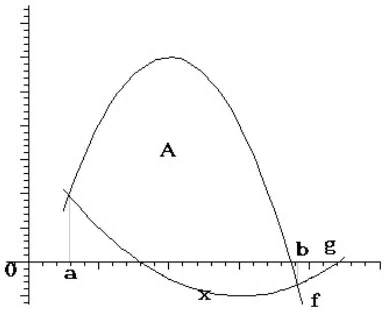
$$A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$

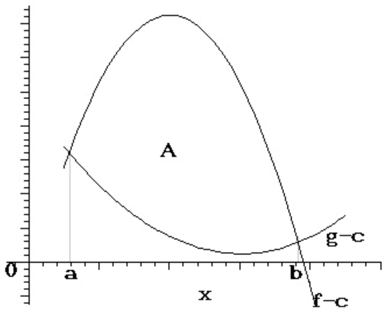


Para o caso em que f ou g é negativa para algum x no intervalo $[a, b]$, obtemos a mesma fórmula para a área da região compreendida entre os dois gráficos e as retas $x = a$ e $x = b$. Basta considerarmos as funções $f_1(x) = f(x) - c$ e $g_1(x) = g(x) - c$, onde $c \leq \min\{g(x)|x \in [a, b]\} < 0$. Logo, as funções f_1 e g_1 satisfazem $f_1(x) \geq g_1(x) \geq 0$ e pela fórmula obtida acima temos

$$A = \int_a^b [f_1(x) - g_1(x)]dx = \int_a^b [f(x) - c - g(x) + c]dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$

Como os gráfico de f_1 e g_1 podem ser obtidos pelos de f e g através de uma translação vertical, a área limitada por eles é a mesma limitada por f e g. Portanto, o resultado acima é o que procurávamos.





Exemplo 3.31. Calcule a área da região limitda pelas curvas $y = x^2$ e $y = 4$.

Os pontos de interseção dessas curvas são $(2, 4)$ e $(-2, 4)$. Então, vamos considerar o intervalo $[-2, 2]$ para o cálculo da área. Observe que $4 \geq x^2$, $\forall x \in [-2, 2]$, dessa forma,

$$A = \int_{-2}^{2} (4 - x^2) dx = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{2} = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3}.$$

Exemplo 3.32. Calcule a área da região limitada pelas curvas $y = 3 - x^2$ e $y = x + 1$ no intervalo $[-1, 1]$.

Nesse intervalo temos que $3 - x^2 \geq x + 1$. Assim,

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{1} [(3 - x^2) - (x + 1)] dx = \int_{-1}^{1} [2 - x^2 - x] dx \\ &= \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{1} \\ &= \left(2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) - \left(-2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{10}{3}. \end{aligned}$$

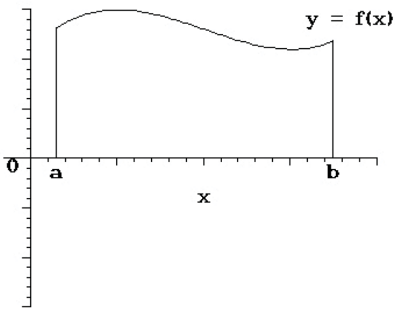
Exemplo 3.33. Calcule a área da região limitada pelas funções $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ no intervalo $[0, 2\pi]$.

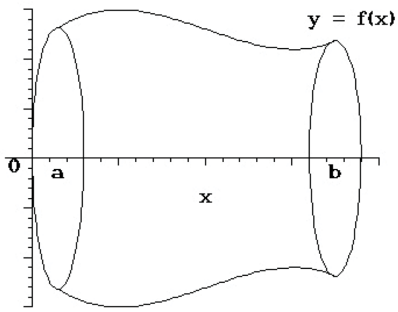
Para os subintervalos $[0, \frac{\pi}{4}]$ e $[\frac{5\pi}{4}, 2\pi]$ temos que $\cos x \geq \operatorname{sen} x$ enquanto para o subintervalo $[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$ temos $\operatorname{sen} x \geq \cos x$. Então, para calcular a área entre os dois gráficos, precisamos calcular a área determinada em cada intervalo, ou seja,

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\cos x - \operatorname{sen} x]dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} [\operatorname{sen} x - \cos x]dx + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} [\cos x - \operatorname{sen} x]dx \\
&= (\operatorname{sen} x + \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + (-\cos x - \operatorname{sen} x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} + (\operatorname{sen} x + \cos x)\Big|_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} \\
&= \left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{sen}(0) - \cos(0)\right) \\
&\quad + \left(-\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\
&\quad + \left(\operatorname{sen}(2\pi) + \cos(2\pi) - \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) \\
&= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
&= 4\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

Cálculo de volumes de sólido de revolução

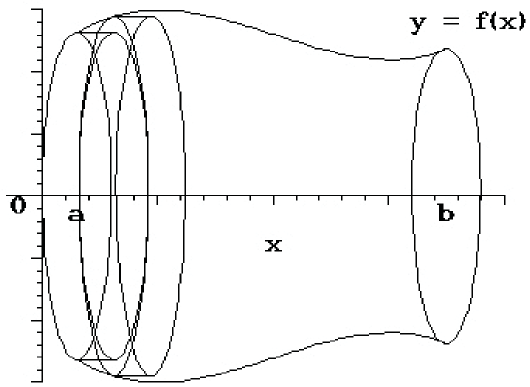
Um problema que aparece com frequência nas ciências físicas é a determinação do volume de um objeto. Aqui, apresentaremos uma forma de se obter volume de um determinado sólido. Se a região sob uma curva $y = f(x)$ entre $x = a$ e $x = b$ gira ao redor do eixo-x, ela gera uma figura tridimensional chamada de **sólido de revolução**. A forma simétrica desse tipo de sólido facilita o cálculo de seu volume.





Assim como fizemos para áreas anteriormente, particionaremos o intervalo $[a, b]$ em n e consideremos os retângulos como mostra a figura abaixo. A revolução desses retângulos nos dá um sólido, o qual é formado por discos de raio $f(x_k^*)$ e altura Δx_k, onde x_k^* é um ponto no k-ésimo subintervalo e Δx_k o comprimento desse subintervalo, $k = 1, \ldots, n$. Logo, o volume desse sólido é

$$\sum_{k=1}^{n} \pi[f(x_k^*)]^2 \Delta x_k.$$



Se o comprimento dos subintervalos Δx_k está próximo de zero, então, essa soma deve estar próxima do volume do sólido original. Assim, definimos o volume do sólido de revolução como o limite dessa soma. Ou seja,

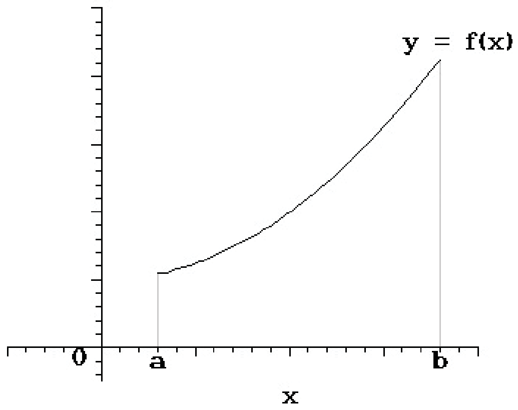
$$V = \lim_{\text{máx } \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \pi[f(x_k^*)]^2 \Delta x_k = \int_a^b \pi[f(x_k^*)]^2 dx$$

Exemplo 3.34. Uma esfera de raio a pode ser obtida através da revolução do semicírculo $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ em torno do eixo das abscissas. Portanto, podemos deduzir a fórmula do volume da esfera de raio a utilizando a fórmula obtida acima. Temos

$$\begin{aligned} V_{\text{esfera}} &= \int_{-a}^{a} \pi(\sqrt{a^2 - x^2})^2 dx = \int_{-a}^{a} \pi(a^2 - x^2) dx \\ &= \pi \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2) dx = \pi \left(a^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-a}^{a} \\ &= \pi \left(a^3 - \frac{a^3}{3} + a^3 - \frac{a^3}{3} \right) = \pi \frac{4}{3} a^3. \end{aligned}$$

Cálculo de comprimento de arco

Um arco é a parte de uma curva que está entre dois pontos especificados, A e B, como na figura abaixo.



Fisicamente, é simples medir um comprimento de arco. Basta ajustar uma corda ao arco, esticá-la e medir seu comprimento com uma régua. Matematicamente, podemos dividir o arco em partes, utilizando os pontos $P_0 = A, P_1, P_2, \ldots, P_n = B$. Fazendo a soma dos segmentos $\overline{P_0P_1}, \overline{P_1P_2}, \ldots \overline{P_{n-1}P_n}$, obtemos uma aproximação, para menos, do comprimento do arco. A aproximação será melhor quanto maior for o n.

Mais formalmente, se $y = f(x)$ é uma função contínua e derivável sobre $[a, b]$, tome $\mathcal{P}_n = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, \ldots, x_n = b\}$ uma partição de $[a, b]$. Seja P_k o ponto $(x_k, f(x_k))$. O comprimento total da poligonal $P_0P_1 \ldots P_{k-1}P_k \ldots P_n$ é a soma das distâncias entre dois pontos consecutivos, ou seja,

$$C_{\mathcal{P}_n} = \sum_{k=1}^{n} d(P_{k-1}, P_k).$$

Aplicando a fórmula da distância, obtemos

$$\begin{aligned} C_{\mathcal{P}_n} &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2} \\ &= (x_k - x_{k-1})\sqrt{1 + \frac{(f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}{(x_k - x_{k-1})^2}} \end{aligned} \tag{3.8}$$

Como f é derivável, pelo teorema do valor médio, existe um $x_k^* \in (x_{k-1}, x_k)$ tal que

$$f'(x_k^*) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}.$$

Substituindo na equação (3.8) e tomando $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, obtemos

$$C_{\mathcal{P}_n} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2} \;\; \Delta x_k.$$

Assim, o comprimento do arco $y = f(x)$ para $x \in [a, b]$ é dado pelo limite

$$\begin{aligned} C &= \lim_{\text{máx}\Delta x_k \to 0} C_{\mathcal{P}_n} = \lim_{\text{máx}\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2} \;\; \Delta x_k \\ &= \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \;\; dx. \end{aligned}$$

Exemplo 3.35. Calcular o comprimento da curva $y = 2x^{3/2}$ entre os pontos $(0,0)$ e $(2, 4\sqrt{2})$.

Temos que $[a,b] = [0,2]$ e $y' = 3x^{1/2}$, então,

$$C = \int_0^2 \sqrt{1 + (3x^{1/2})^2}\, dx = \int_0^2 \sqrt{1+9x}\, dx.$$

Utilizando a substituição $u = 1 + 9x$ e $du = 9dx$, temos

$$\int \sqrt{1+9x}dx = \int \sqrt{u}\ \frac{1}{9}\ du = \frac{1}{9}\frac{u^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{1}{9}\frac{(1+9x)^{3/2}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{27}(1+9x)^{3/2} + c.$$

Daí,

$$C = \frac{2}{27}(1+9x)^{3/2}\bigg|_0^2 = \frac{2}{27}((1+18)^{3/2} - (1+0)^{3/2}) = \frac{2}{27}(19^{3/2} - 1).$$

Exercícios

1. Calcule as seguintes integrais (não se esqueça de incluir a constante de integração nos casos de integrais indefinidas!):

   a) $\int (3x^4 - 7x^3 + 10)dx$;

   b) $\int \operatorname{sen} 5x dx$;

   c) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} dx$;

   d) $\int_0^{\pi/5} \cos 5x dx$;

   e) $\int_0^{\sqrt{\pi}} x \cos(x^2) dx$.

2. Calcule a área da região sob a função $y = \frac{1}{x}$ e acima do eixo x, compreendida:

   a) no intervalo de 1 a 2;

b) no intervalo de 1 a 3;

c) no intervalo de 1 a k, onde k é um número real qualquer maior do que 1.

3. Calcule a área da região delimitada pelas funções $y = 3 - x^2$ e $y = x + 1$.

4. Calcule a área da região delimitada pelas funções $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$ no intervalo de 0 a $\frac{\pi}{4}$.

5. Calcule a área da região delimitada pelas funções $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$ no intervalo de $\frac{\pi}{4}$ a $\frac{5\pi}{4}$.

a) Determine $\int_0^2 (x^2 - x)dx$.

b) Calcule $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1 - 4x^2}} dx$.

c) Calcule $\int \cos x \cdot \operatorname{sen}(\cos x) dx$.

d) Determine a área compreendida entre as funções $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \cos x$, no intervalo de $[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$.

e) Considere uma função positiva f, definida no intervalo $[a, b]$. Que interpretação física podemos dar para a integral

$$\int_a^b \pi[f(x)]^2 dx?$$

6. Use integração por partes para calcular

$$\int e^x \operatorname{sen} x dx.$$

Referências Bibliográfias

[1] STEWART, J. *Cálculo*. Vol. 1. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2005.

[2] SIMMONS, G. F. *Cálculo com geometria analítica*. Vol. 1. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

[3] LIMA, E. L. *Curso de análise*. Vol. 1. 10^a edição. Rio de Janeiro: Associação Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2002.

Esta obra foi composta por Luciana Lima Ventura
Magno Alves de Oliveira.
Fonte Família Times New Roman, corpo 11, Família Caecilia LT std e impressa pela gráfica
AGBR em papel couche fosco 115g.