**ESTUDO DE CASO DA TEORIA DOS JOGOS POR FUNÇÃO POLINOMIAL DE PROBABILIDADE E ANÁLISE DOS PONTOS CRÍTICOS.**

**Resumo:**

O objetivo deste trabalho é avaliar o modelo clássico do jogo *Dilema do Prisioneiro* com a formalização da Teoria dos Jogos que pode ser modelada para jogos mais complexos, de competição com dois jogadores, munido de uma estratégia ótima para tomada de decisão, que pode ser aproveitada para analisar: Investimentos financeiros, aquisição de suprimentos, divisão de tarefas em empresas entre outros modelos matemáticos. O estudo é fomentado de tal modo que pode ser abordado em cursos de ensino médio regular, ensino médio integrado com técnico em logística e iniciação da teoria básica para tecnólogos em logística.

**Palavras-chave:** Teoria dos Jogos, Álgebra Linear, Matrizes, Sistema Linear, Estratégias Ótimas.

**Abstract:**

The aim of this study is to evaluate the classical model of Prisoner's Dilemma game based on the formalization of the Game Theory which can be structured to more complex games, such as racing games for two players, in which optimal strategies are used when making decisions and that can also be used to analyze: Investments, purchase of supplies, division of tasks in a company among other math models. The study is organized in order to be used in regular High School courses, in Integrated High School vocational courses as well as in Logistics Colleges.

**Keywords:** Game Theory, Linear Algebra, Matrices, Linear System, Optimal Strategies.

**ESTUDO DE CASO DA TEORIA DOS JOGOS POR FUNÇÃO POLINOMIAL DE PROBABILIDADE E ANÁLISE DOS PONTOS CRÍTICOS.**

**1. Introdução:**

Antes de iniciar com os procedimentos matemáticos da teoria dos jogos vamos conhecer um pouco mais sobre alguns jogos e suas origens, iniciando pelo filósofo austríaco, naturalizado britânico, Ludwig Joseph Johann Wittgenstein (1889 - 1951).

Wittgenstein foi provavelmente o primeiro filósofo acadêmico a tentar criar uma definição para jogo. Ao estudar a arquitetura da racionalidade, em seu texto Investigações Filosóficas, cria o termo *jogos de linguagem*, indicando que o jogo percebe características de entretenimento com regras e indica, ainda, que jogos não podem ser representados por uma definição, devido ao seu formato apresentar um conjunto de características compatíveis dentre as definições possíveis.

 Seu contemporâneo, Johan Huizinga (1872 - 1945), em sua obra, Homo Ludens, procura não definir e sim conceituar o que é jogo. Ao passar dos capítulos, Huizinga debate a temática sobre o que é o jogo, porém ao invés de definir, acaba indicando o que não é jogo para alinhar com os conceitos propostos, que de acordo com o autor, o jogo não deve ser competitivo e somente poderia ser considerado se trabalhado apenas para a diversão e entretenimento. De forma sucinta, diz que jogo é toda e qualquer atividade em que exista o praticante dele e seu jogador aceita suas regras para participar. Estas regras em geral são fáceis de memorizar e dão a condição de início, meio e fim da atividade. No início são apresentados às regras aos jogadores, no meio ocorrem eliminatórias e no fim temos o vencedor. Nestes conceitos Johan indica que podem ter dois ou mais participantes, mas em sua grande maioria temos um grupo concorrendo diretamente com outro grupo, com o modelo de dois jogadores.

 Algo totalmente diferente dos propósitos de Wittgenstein e Huizinga que parte da condição lúdica, ocorre na competição comercial como ferramenta para aumentar suas chances de sucesso. Atualmente a Teoria dos Jogos é um segmento da Matemática Aplicada que estuda situações algébricas e estratégias, em que os jogadores avaliam diferentes decisões para maximizar seu retorno. Teve seu desenvolvimento inicial como ferramenta para compreender o comportamento de sistemas econômicos, e, a partir de 1970 iniciaram os estudos massivos para evolução das espécies por seleção natural juntamente com o modelo “presa X predador” e equações de Lotka-Volterra em dinâmicas populacionais.

Atualmente a Teoria dos Jogos tem sido aplicada com sucesso em Ciências Políticas, Ciências Militares com Logística de Suprimentos e/ou Serviços, Ética, Economia, Filosofia e, recentemente, no Jornalismo, uma área que apresenta inúmeros e diversos jogos, competitivos e cooperativos. Por fim temos atuação na Ciência da Computação causando avanços na Inteligência Artificial e Cibernética com sistemas de Redes Neurais.

**2. Objetivo:**

O objetivo deste trabalho é avaliar o modelo clássico do jogo *Dilema do Prisioneiro* com a formalização da Teoria dos Jogos que pode ser modelada para jogos mais complexos, de competição com dois jogadores, munido de uma estratégia ótima para tomada de decisão, que pode ser aproveitada para analisar: Investimentos financeiros, aquisição de suprimentos, divisão de tarefas em empresas entre outros formatos. O estudo é fomentado de tal modo que pode ser abordado em cursos de ensino médio regular, ensino médio integrado com técnico em logística e iniciação da teoria básica para tecnólogos em logística.

**3. Revisão de literatura:**

Neste tópico veremos apenas as operações que são essenciais para o pleno desenvolvimento das atividades. Deste modo podemos esperar com os itens de matrizes e sistemas lineares: representação de matrizes, condições para efetuar o produto entre matrizes, cálculo do produto matricial, representação de sistemas lineares, representação de sistemas lineares com notação matricial e recurso computacional para solução. Noções de probabilidades, limite e teoria dos jogos. A noção intuitiva de limite será abordada no tópico de problemas propostos por se tratar de apenas um ponto necessário em algumas operações de otimização.

É certo que os procedimentos ficarão um tanto complexos para serem efetuados tradicionalmente no papel, então para cada tópico, se preciso for, teremos as linhas de comando do software gratuito Máxima, que pode ser obtido no endereço: <http://maxima.sourceforge.net/>, Alguns gráficos foram gerados com a calculadora gráfica Microsoft Mathematics v. 4.0, também gratuito, disponível em: <http://www.microsoft.com/pt-br/download/details.aspx?id=15702>.

**3.1 Matrizes e sistemas lineares:**

No Oriente os chineses representavam os sistemas lineares por meio de seus coeficientes escritos com barras de bambu sobre os quadrados de um tabuleiro. Assim acabaram descobrindo o método de resolução por eliminação que consiste em anular coeficientes por meio de operações elementares. Exemplos desse procedimento encontram-se nos Nove capítulos sobre *A Arte da Matemática*, um texto que data provavelmente do século 111 a.C.

 Porém somente em 1683 o japonês Takakazu Seki Kowa (1642-1708) apareceu com a proposta de escrever determinante como um polinômio associando a um quadrado de números. Kowa foi considerado o mais conceituado matemático japonês do século XVII e chegou a esta condição através do estudo de sistemas lineares, sistematizando o procedimento chinês com duas equações e duas variáveis.

 O uso de determinantes para solução de sistemas lineares começou, no ocidente, dez anos depois no trabalho de Leibniz, também ligado a sistemas lineares. Leibniz criou a condição de compatibilidade de sistemas de três equações e duas incógnitas como matriz quadrada de ordem 3 e seu determinante utilizando os coeficientes e termos independentes.

A regra de Cramer para solução de sistemas de n equações a n incógnitas, por meio de determinantes, é na verdade uma descoberta do escocês Colin Maclaurin (1698-1746), datando provavelmente de 1729, embora publicada em 1748 no seu *Treatise of Algebra*. Mas o suíço Gabriel Cramer (1704-1752) também chegou à regra de modo independente e na sua obra *Introdução à Análise das Curvas Planas* teve a oportunidade de consolidar e divulgar a descoberta.

 O francês Étienne Bézout (1730-1783), autor de textos matemáticos de sucesso em seu tempo, padronizou em 1764 os sinais dos termos da operação dos determinantes. E Alexandre-Theóphile Vandermonde (1735-1796), em 1771, ofereceu a primeira abordagem da teoria dos determinantes independente do estudo dos sistemas lineares, embora também os usasse na resolução destes sistemas.

Pouco tempo depois Arthur Cayley (1821-1895) foi quem chegou à ideia de matriz. A teoria das matrizes de surgiu a partir do interesse por transformações lineares e invariantes algébricos, conceitos que foram compartilhados com o matemático inglês James Joseph Sylvester (1814-1897) considerado o fundador dos estudos matemáticos nos Estados Unidos da América. Por terem a mesma linha de pesquisa, se tornaram grandes amigos e desenvolveram os estudos operatórios entre matrizes e sistemas matriciais.

E, por fim, o termo determinante com o sentido atual surgiu em 1812 no trabalho de Augustin-Louis Cauchy (1789-1857). Neste trabalho apresentado à Academia de Ciências, Cauchy sumariou e simplificou o que era conhecido até então sobre determinantes, melhorou a notação, mas a atual com duas barras verticais só surgiria em 1841 com Arthur Cayley, e, deu uma demonstração do teorema da multiplicação de determinantes. Meses antes Alfred Binet (1786-1856) efetuou a primeira demonstração do teorema, porém a de Cauchy era consideravelmente superior.

**3.1.1 Matrizes e produto matricial:**

 Chama-se de matriz do tipo $m×n$ (lê-se “m por n”) toda tabela de números dispostos em “m” linhas e “n” colunas, podendo ser representadas por parênteses ( ), colchetes [ ] ou entre barras duplas || || e sua representação é dada por:

$$A\_{m×n}=\left[\begin{matrix}a\_{11}&\cdots &a\_{1j}\\\vdots &\ddots &\vdots \\a\_{i1}&\cdots &a\_{ij}\end{matrix}\right]$$

Em $A\_{m×n}$ temos que sua ordem é $m×n$, sendo $a\_{ij}$ o elemento genérico da matriz de coordenadas i linhas e j colunas. Nestas condições podemos avaliar que a matriz $A\_{m×n}$ é retangular se $m\ne n$ e sua geometria será quadrada com $m=n$. Caso tenhamos $m=n$, então $A\_{m×n}$ será $A\_{m×m}=A\_{m²}$ ou $A\_{n×n}=A\_{n²}$. Repare que letra maiúscula representa a matriz e letra minúscula o elemento coordenado da matriz e no caso da ordem das quadradas, dizemos quadradas de ordem “2”, ordem “3”, ordem “n” ou “m”.

 A multiplicação matricial tem regras bem definidas e propriedades operatórias, mas antes vamos entender como a regra de multiplicação é formada para depois compreender suas propriedades.

 Vamos considerar que o sistema linear tem o seguinte formato:

$$I=\left\{\begin{array}{c}x=a\_{11}p+a\_{12}q\\y=a\_{21}p+a\_{22}q\end{array}\right. e II=\left\{\begin{array}{c}p=b\_{11}r+b\_{12}s\\q=b\_{21}r+b\_{22}s\end{array}\right.$$

 Logo:

$$\left\{\begin{array}{c}x=a\_{11}(b\_{11}r+b\_{12}s)+a\_{12}(b\_{21}r+b\_{22}s)\\y=a\_{21}(b\_{11}r+b\_{12}s)+a\_{22}(b\_{21}r+b\_{22}s)\end{array}\right.$$

Desenvolvendo e agrupando os semelhantes:

$$III=\left\{\begin{array}{c}x=\left(a\_{11}.b\_{11}+a\_{12}.b\_{21}\right)r+(a\_{11}.b\_{12}+a\_{12}.b\_{22})s\\y=(a\_{21}.b\_{11}+a\_{22}.b\_{21})r+(a\_{21}.b\_{12}+a\_{22}.b\_{22})s\end{array}\right.$$

Criando as matrizes dos coeficientes de I = A, II = B e III = C

$$A=\left[\begin{matrix}a\_{11}&a\_{12}\\a\_{21}&a\_{22}\end{matrix}\right]; B=\left[\begin{matrix}b\_{11}&b\_{12}\\b\_{21}&b\_{22}\end{matrix}\right]; $$

$$C=\left[\begin{matrix}a\_{11}.b\_{11}+a\_{12}.b\_{21}&a\_{11}.b\_{12}+a\_{12}.b\_{22}\\a\_{21}.b\_{11}+a\_{22}.b\_{21}&a\_{21}.b\_{12}+a\_{22}.b\_{22}\end{matrix}\right]$$

 Ou seja, cada elemento $c\_{ij}=a\_{i1}.b\_{1j}+a\_{i2}.b\_{2j}$. A partir deste ponto podemos criar uma regra geral de multiplicação entre matrizes.

 Definimos produto escalar como o produto dos elementos de uma linha com os elementos de uma coluna, sendo a condição necessária para operar é: O total de elementos da linha deve ser igual ao total de elementos da coluna. Visto que a quantidade de termos de uma linha ou de uma coluna depende da ordem da matriz, podemos estender esta regra apenas avaliando as suas ordens.

 Assim ocorrerá o produto escalar se e somente se:

$$A=(a\_{ij})\_{m×n} e B=(b\_{ij})\_{n×p}$$

$$⟹A.B=C(c\_{ij})\_{m×p}, ∀c\_{ij}=a\_{i1}.b\_{1j}+…+a\_{in}.b\_{nj}$$

Observando que o número de colunas de A, n, deve contar o mesmo valor do número de linhas de B para que a operação seja possível.

**3.1.2 Sistemas lineares, representação de sistemas lineares com notação matricial e solução com recurso computacional:**

 As equações que compõem o conjunto de subequações necessárias para a resolução de um problema, sendo suas variáveis do primeiro grau, e, uma vez relacionadas, encontraram neste conjunto, o que chamamos de sistema de equações lineares.

Podemos representar o sistema linear genérico do seguinte modo:

$$\left\{\begin{array}{c}a\_{11}.x\_{1}+…+a\_{1n}.x\_{n}=b\_{1}\\ \vdots \vdots \vdots \vdots \\a\_{m1}.x\_{1}+…+a\_{mn}.x\_{n}=m\end{array}\right.$$

Em que: $x\_{1},…, x\_{n}$ são variáveis ou incógnitas; $a\_{ij}$ são os coeficientes das variáveis, com $1\leq i\leq m$ e $1\leq j<n$; $b\_{i}$ são os termos independentes, com $1\leq i<m$.

Um sistema linear é classificado de acordo com o número de soluções que apresenta, assim sendo, existem três classificações: Sistema Impossível (SI), Sistema Possível e determinado (SPD) e Sistema Possível e Indeterminado (SPI). Para este trabalho temos especial interesse nos SPD e SPI para otimização de sistemas.

No tópico anterior de matrizes e produto matricial mostramos a forma geral da matriz dos coeficientes de um sistema linear e a partir desta notação matricial podemos avaliar o cálculo do determinante e consequentemente identificar a sua classificação.

Veja que se:

$$\left\{\begin{array}{c}a\_{11}.x\_{1}+…+a\_{1n}.x\_{n}=b\_{1}\\ \vdots \vdots \vdots \vdots \\a\_{m1}.x\_{1}+…+a\_{mn}.x\_{n}=b\_{m}\end{array}\right.=\left\{\begin{array}{c}a\_{11}.x\_{1}+…+a\_{1j}.x\_{n}=b\_{1}\\ \vdots \vdots \vdots \vdots \\a\_{i1}.x\_{1}+…+a\_{ij}.x\_{n}=b\_{m}\end{array}\right.$$

 Então:

$A\_{m×n}=\left[\begin{matrix}a\_{11}&\cdots &a\_{1j}\\\vdots &\ddots &\vdots \\a\_{i1}&\cdots &a\_{ij}\end{matrix}\right]$ tem o determinante $D(A)$

 Logo, classificamos:

$D\left(A\right)\ne 0⟺SPD$ e $D\left(A\right)=0⟺\left\{\begin{array}{c}SPI\\SI\end{array}\right.$

 Avaliando o caso de $D\left(A\right)=0$, temos a condição definida em SPI ou SI, então avaliamos a inclinação das equações do sistema.

 Seja, por exemplo, um sistema quadrado de ordem 2 e sua matriz dos coeficientes A:

$$\left\{\begin{array}{c}r\_{1}: a\_{11}.x\_{1}+a\_{12}.x\_{2}=b\_{1} \left(I\right)\\r\_{2}: a\_{21}.x\_{1}+a\_{22}.x\_{2}=b\_{2} (II)\end{array}\right.$$

$$A=\left[\begin{matrix}a\_{11}&a\_{12}\\a\_{21}&a\_{22}\end{matrix}\right]$$

 Se $D\left(A\right)=a\_{11}.a\_{22}-a\_{12}.a\_{21}=0⟹a\_{11}.a\_{22}=a\_{12}.a\_{21}$, e $x\_{2}$ com solução dependente de $x\_{1}$, então avaliamos a inclinação de I e II. A inclinação é calculada por:

$m\_{I}=-\frac{a\_{11}}{a\_{12}}$ e $m\_{II}=-\frac{a\_{21}}{a\_{22}}$

 Como estamos avaliando paralelismo, temos $m\_{I}=m\_{II}$, o que gera $-\frac{a\_{11}}{a\_{12}}=-\frac{a\_{21}}{a\_{22}}$, ou reescrevendo, $\frac{a\_{11}}{a\_{21}}=\frac{a\_{12}}{a\_{22}}⟹a\_{11}.a\_{22}=a\_{12}.a\_{21}$. Repare que o determinante quando igualado a zero tem a mesma fórmula operada com as inclinações, logo para avaliar se duas retas são paralelas, apenas o cálculo do determinante igual a zero é suficiente. Já a condição de serem paralelas e colineares $r\_{1}≡r\_{2}$ ou paralelas e não colineares $r\_{1}≈r\_{2}$, avaliamos o termo independente de cada equação:

$$\frac{b\_{1}}{a\_{12}} de \left(I\right)=\frac{b\_{2}}{a\_{22}}de \left(II\right)⟹b\_{1}.a\_{22}=b\_{2}.a\_{12}$$

$$⟹b\_{1}.a\_{22}-b\_{2}.a\_{12}=0$$

 Que é exatamente a equação do determinante da matriz de solução parcial em $x\_{1}$, aqui chamada de matriz $X\_{1}$:

$$X\_{1}=\left[\begin{matrix}a\_{12}&b\_{1}\\a\_{22}&b\_{2}\end{matrix}\right]$$

$$D\left(X\_{1}\right)=b\_{1}.a\_{22}-b\_{2}.a\_{12}$$

Podemos concluir que para estar na condição de retas paralelas e colineares a condição será:

$D\left(A\right)=0$ e $D\left(X\_{1}\right)=0$ (SPI)

E para serem retas paralelas e não colineares a condição será:

$D\left(A\right)=0$ e $D\left(X\_{1}\right)\ne 0$ (SI)

Repare que se temos SPI, podemos encontrar a matriz solução, com a possibilidade de ser composta por $b\_{1}$, $b\_{2}$, ..., $b\_{m}$, contendo $b\_{1}=b\_{2}=…=b\_{(m-1)}=b\_{m}=0$, então dizemos que o sistema linear é homogêneo e se tratando de um SPI com $D\left(A\right)=0$ e afirmamos que há soluções diferentes da trivial $(0, 0, 0)$.

Já a resolução de sistemas lineares é de fácil operação quando trabalhado em calculadora algébrica. Nesta breve atividade utilizaremos a calculadora algébrica “Máxima”, programa gratuito, que usa linhas de comando para efetuar operações. Aparentemente a calculadora não oferece restrições de número de linhas e de variáveis aceitas, logo os comandos citados abaixo seguem a mesma sintaxe para sistemas mais robustos. Podemos operar o cálculo de determinantes e resolução de sistemas, por exemplo:

 **Problema 1:**

Resolver em ($x\_{1},x\_{1})$: $\left\{\begin{array}{c}a\_{11}.x\_{1}+a\_{12}.x\_{2}=b\_{1}\\a\_{21}.x\_{1}+a\_{22}.x\_{2}=b\_{2}\end{array}\right.$

Comando:

linsolve([a11\*x1+a12\*x2=b1, a21\*x1+a22\*x2=b2], [x1,x2]);

(aperte: Shift + Enter)

 Resultado:



**Problema 2:**

Calcular o determinante de $A=\left[\begin{matrix}a\_{11}&a\_{12}\\a\_{21}&a\_{22}\end{matrix}\right]$

Comando:

determinant(matrix([a11,a12],[a21,a22]));

(aperte: Shift + Enter)

 Resultado:



 **Problema 3:**

Calcular o determinante de $X\_{1}=\left[\begin{matrix}a\_{12}&b\_{1}\\a\_{22}&b\_{2}\end{matrix}\right]$

Comando:

determinant(matrix([a12,b1],[a22,b2]));

(aperte: Shift + Enter)

 Resultado:



**3.1.3 Noções de probabilidade e notação matricial:**

 No ano de 1654, um jogador da sociedade parisiense, Chevalier de Mére (1607-1684), propôs ao matemático Blaise Pascal (1623-1662) algumas questões sobre probabilidade de vencer em jogos. Uma das questões abordadas foi: “Um jogo de dados entre dois adversários chega ao fim quando um dos jogadores vence três partidas. Se este jogo for interrompido antes do final, de que maneira cada um dos jogadores deverá ser indenizado?” (PAIVA, Manoel Rodrigues, 2009, p.272).

As reflexões deste problema e de outros informados por Mére levaram Pascal a se corresponder com Pierre de Fermat (1601-1665), o que desencadeou discussões sobre a necessidade de desenvolver novas teorias que mais tarde acabou recebendo o nome de teoria das probabilidades.

O pleno desenvolvimento das teorias da probabilidade e os avanços dos cálculos de probabilidade devem ser atribuídos a vários matemáticos. Agradecemos principalmente aos algebristas italianos Pacioli, Cardano e Tartaglia com as primeiras considerações calculadas acerca dos jogos e apostas. Dentre os matemáticos mais influentes, podemos destacar: Blaise Pascal, Pierre de Fermat, Jacob Bernoulli, Pierre Simon Laplace, Carl Friedrich Gauss e Lenis Poisson.

O início do cálculo das probabilidades e análise combinatória foi estabelecido por Pascal e Fermat, baseado em apostas no jogo de dados levantando diversas hipóteses e seus possíveis resultados, garantindo o espaço da teoria das probabilidades como uma ciência.

Bernoulli contribuiu em vários procedimentos, que vão desde combinações e permutações simples até a classificação binomial. Laplace formulou a regra de sucessão enquanto Gauss estabelecia o método dos mínimos quadrados que serviu de base para a regressão polinomial univariada até a multivariada e também a lei das distribuições das probabilidades, que ficou conhecida como “curva normal” ou “curva de Gauss”.

Atualmente os estudos relacionados às probabilidades são utilizados em diversas situações, pois possuem axiomas, teoremas e definições bem incisivos, cuja aplicação principal diz respeito ao estudo da equidade dos jogos e seus respectivos prêmios.

Quanto ao conhecimento de probabilidade necessário para desenvolver a proposta deste trabalho, se resume em identificar o espaço amostral e os eventos que o compõem e como devemos criar uma matriz de eventos.

Podemos definir o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório como espaço amostral e qualquer subconjunto deste espaço amostral é chamado de evento. Por exemplo, um jogo de cara e coroa. Ao lançar uma moeda pode sair apenas cara ou coroa, com 1 elemento em cada situação, e o espaço amostral será {cara, coroa} com 2 elementos. Outro exemplo é o jogo de lançamento de um dado de seis faces. Seus resultados podem ser 1, 2, 3, 4, 5 ou 6, com 1 elemento, portanto $n\left(A\right)\left(AEp\right)=1$. O conjunto E = {1, 2, 3, 4, 5, 6} é o espaço amostral, com o total de 6 elementos, então dizemos “$n\left(E\right)=6$”.

Uma vez que o espaço amostral e evento estão claros, partimos para a probabilidade, que nada mais é do que a razão da quantidade de eventos favoráveis pela quantidade de eventos possíveis, portanto:

$$P=\frac{n(Ep)}{n(E)}$$

 Sendo *P* a probabilidade do evento favorável, $n\left(Ep\right)$ o número de eventos favoráveis e $n(E)$ o número de eventos possíveis do experimento. Como $n\left(Ep\right)\leq n(E)$, então $0\leq P=\frac{n(Ep)}{n(E)}\leq 1$, com $n(E)$ finito e não vazio. Isto quer dizer que a soma das probabilidades $P\_{1}+P\_{2}+…+P\_{x-1}+P\_{x}=1$.

 As partes, $P\_{x}=\frac{n\left(Ep\_{x}\right)}{n(E) }$, podem ser escritas matricialmente em uma coluna:

$$P=\left(a\_{i1}\right)\_{m×1}=\left[\begin{matrix}a\_{11}\\\vdots \\a\_{m1}\end{matrix}\right];com \left\{\begin{array}{c}a\_{11}=P\_{1}\\…\\a\_{m1}=P\_{x}\end{array}\right.; x=m\in N^{\*}$$

 Ou em formato de uma linha:

$$P=\left(a\_{1j}\right)\_{1×n}=\left[\begin{matrix}a\_{11}&…&a\_{1n}\end{matrix}\right];com \left\{\begin{array}{c}a\_{11}=P\_{1}\\…\\a\_{m1}=P\_{x}\end{array}\right.; x=n\in N^{\*}$$

 Com a notação matricial podemos efetuar a multiplicação de eventos possíveis entre 2 ou mais sistemas, gerando a taxa de retorno do jogo, ponto que será detalhado posteriormente nos problemas propostos, ou a partir da matriz de compensação podemos encontrar as probabilidades que maximizam os ganhos sobre o oponente.

**3.1.4 Noções sobre Teoria dos Jogos:**

 Os jogos de tabuleiros, dados, cartas, jogos de salão e outros, sempre serviram de entretenimento para divertir a humanidade desde a formação das primeiras civilizações. Estes jogos colocam pessoas em situações de vencer ou perder, a partir das escolhas feitas no início da partida. O jogo, enquanto lúdico, se torna uma ferramenta para o desenvolvimento das pessoas, e com o surgimento da teoria da probabilidade, ganhou novas dimensões para maximizar os lucros de uma partida. Seria esta uma forma de trapaça?

Os estudos sobre a teoria da probabilidade desenvolvidos por Pascal e Fermat foram fundamentais para dar início método científicos aplicado em jogos de azar. Em seguida Antoine Augustin Cournot (1801-1877), matemático francês, com a análise do ponto de equilíbrio nas estratégias de jogos, formalizou um conceito especifico de equilíbrio que mais tarde foi generalizado por John Forbes Nash Jr (1928-Atual).

John Von Neumann (1903-1957), matemático húngaro-americano, provou o teorema “minimax”, segundo este teorema há sempre uma solução racional para um conflito bem definido entre dois indivíduos mesmo quando os interesses são completamente opostos. Minimax foi o teorema deixado em aberto pelo matemático francês Émile Borel (1871-1956).

A solução do teorema foi publicada no artigo: *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele* (Sobre a Teoria dos Jogos de Estratégia, 1928), e nesse período Oskar Morgenstern (1902-1977), economista alemão, publicou o livro: *Implicações Quantitativas do Comportamento do Máximo*, no qual discute a dicotomia entre o individualismo e a interação social para servir de base em análise econômica. Ao completar a dialética, conclui que quando indivíduos interagem, a racionalidade passa a ser relativa e se a racionalidade do individuo não é plena a maximização também não será, ou seja, para melhor resultado, o problema deve ser medido e calculado.

Morgenstern e Von Neumann (1903-1957) juntaram os seus trabalhos e publicaram, em 1944, a obra: *The Theory of Games and Economics Behavior* (Teoria dos Jogos e Comportamento Econômico, 1944), que além de desenvolver uma teoria de jogos para três ou mais participantes, afirma que o comportamento da economia depende basicamente da interação entre os agentes, já que ele afeta diretamente a elaboração de estratégias e tomadas de decisão dos produtores e dos consumidores.

Em 1950, Nash, matemático estadunidense que conquistou o prêmio Nobel de economia em 1994, um dos principais nomes da história da teoria dos jogos, formado pela Universidade de Princeton, em 1950, com a tese *NonCooperative Games* (Jogos Não-Cooperativos, publicada em 1951) que lhe valeu mais tarde a indicação para o Nobel. Nesta tese, Nash provou a existência de ao menos um ponto de equilíbrio em jogos de estratégias para múltiplos jogadores, mas para que ocorra o equilíbrio é necessário que os jogadores se comportem racionalmente e não se comuniquem antes do jogo para evitar acordos. Entretanto, Nash sofria de esquizofrenia que se agravou levando ao seu afastamento das pesquisas para tratamento durante alguns anos. Depois da estabilização do seu quadro mental ele retorna a ministrar aulas no departamento de matemática de Princeton. Em dezembro de 1994, recebeu a medalha com a efígie de Alfred Nobel, das mãos do rei da Suécia. Sua vida conturbada e cheia de brilhantismo na matemática e foi tema de biografia escrita por Sylvia Nasar que originou o filme *Uma Mente Brilhante*, recebendo o Oscar em 2001.

 O problema: *O Dilema do Prisioneiro* talvez seja o exemplo mais conhecido na teoria dos jogos, formulado por Albert W. Tucker em 1950, em um seminário para psicólogos na Universidade de Stanford, com a finalidade de ilustrar a dificuldade de se analisar certos tipos de jogos.

Dois ladrões, Al e Bob, são capturados e acusados de um mesmo crime. Presos em selas separadas e sem poderem se comunicar entre si. O delegado de plantão faz seguinte proposta: cada um pode escolher entre confessar ou negar o crime. Se nenhum deles confessar, ambos serão submetidos a uma pena de 1 ano. Se os dois confessarem, então ambos terão pena de 5 anos. Mas se um confessar e o outro negar, então o que confessou será liberto e o outro será condenado a 10 anos de prisão. (SARTINI, Brígida Alexandre. et al., 2004, p.6).

Vamos avaliar os dados do problema. Al tem duas opções: Confessar ou negar o crime, do mesmo modo que Bob. Estas situações se cruzam gerando uma matriz de compensação. O sinal de negativo indica a perda referente à coordenada **(Al, Bob)**.

|  |  |
| --- | --- |
| $$(Al,Bob)$$ | **Bob** |
| **Confessar** | **Negar** |
| **Al** | **Confessar** | $$(-5,-5)$$ | $$( 0,-10)$$ |
| **Negar** | $$(-10, 0)$$ | $$(-1,-1)$$ |

As matrizes de jogo são: $Al=\left[\begin{matrix}-5&0\\-10&-1\end{matrix}\right] e Bob=\left[\begin{matrix}-5&-10\\0&-1\end{matrix}\right]$ e veja que existe uma probabilidade de Al confessar ou negar, do mesmo modo que Bob também tem sua própria probabilidade. Estes valores dependem de diversos fatores sociais, mas vamos avaliar algumas situações para perceber como funciona a teoria dos jogos.

Na condição de Al pode ser vantajoso confessar se Bob negar, afinal ficará livre enquanto Bob preso por 10 anos. Por outro lado temos que se Al negar pensando em tirar vantagem da situação em que os dois neguem, minimizando o tempo na cadeia para 1 ano, Bob pode simplesmente confessar deixando então Al preso por 10 anos. De modo análogo Bob também avalia as suas possibilidades.

Veja que os dois devem efetuar a sua melhor estratégia, o que torna uma situação simplificada em competição estratégica para obter melhores resultados, e para cada situação temos benefícios/riscos e a teoria dos jogos vem para estudar estas possibilidades, gerando uma condição que minimize os riscos e maximize os resultados.

**4. Analisando estratégias e otimização de resultados:**

Voltando no caso de Al e Bob, há um dilema que deve ser resolvido em suas probabilidades de cada evento para ambos. Para isso vamos considerar P como matriz de Al e Q a matriz de Bob. $P\_{1}Pp\_{1}, Q\_{1}qQ\_{1}=Confessar; P\_{2}Pp\_{2}, Q\_{2}qQ\_{2}=Negar.$

$$P=\left[\begin{matrix}p\_{1}&p\_{2}\end{matrix}\right] e Q=\left[\begin{array}{c}q\_{1}\\q\_{2}\end{array}\right]$$

As matrizes P e Q afetam o equilíbrio do jogo com sua média de compensação por rodada. Do tópico anterior, temos que $P\_{1}Pp\_{1}+P\_{2}pP\_{2}+…+P\_{x-1}pP\_{x-1}+P\_{x}pP\_{x}=1$, logo podemos perceber com facilidade que:

$$\left\{\begin{array}{c}p\_{1}+p\_{2}=1\\q\_{1}+q\_{2}=1\end{array}\right.⟹\left\{\begin{array}{c}p\_{2}=1-p\_{1}\\q\_{2}=1-q\_{1}\end{array}\right.⟹P=\left[\begin{matrix}p\_{1}&1-p\_{1}\end{matrix}\right] e Q=\left[\begin{array}{c}q\_{1}\\1-q\_{1}\end{array}\right]$$

O valor do jogo de Al “V(Al)” é definido por P.Al.Q e o jogo de Bob “V(Bob)” por P.Bob.Q.

$$V\left(Al\right)=\left[\begin{matrix}p\_{1}&1-p\_{1}\end{matrix}\right].\left[\begin{matrix}-5&0\\-10&-1\end{matrix}\right].\left[\begin{array}{c}q\_{1}\\1-q\_{1}\end{array}\right]$$

$$V\left(Bob\right)=\left[\begin{matrix}p\_{1}&1-p\_{1}\end{matrix}\right].\left[\begin{matrix}-5&-10\\0&-1\end{matrix}\right].\left[\begin{array}{c}q\_{1}\\1-q\_{1}\end{array}\right]$$

Vamos fazer algumas considerações para estudar o comportamento do jogo:

$\left(I\right) p\_{1}=\frac{1}{2} e q\_{1}=\frac{1}{2}$

Comando:

p: matrix([1/2,1/2]);

q: matrix([1/2],[1/2]);

Al: matrix([-5,0],[-10,-1]);

Bob: matrix([-5,-10],[0,-1]);

Resultado:



Calculando o valor dos jogos V(Al) e V(Bob):

Comando:

 VAl: p.Al.q;

VBob: p.Bob.q;

Resultado:

 $V\left(Al\right)=-4 e V\left(Bob\right)=-4$

$\left(II\right) p\_{1}=1 e q\_{1}=1$

Comando:

p: matrix([1,0]);

q: matrix([1],[0]);

Al: matrix([-5,0],[-10,-1]);

Bob: matrix([-5,-10],[0,-1]);

Resultado:



Calculando o valor dos jogos V(Al) e V(Bob):

Comando:

 VAl: p.Al.q;

VBob: p.Bob.q;

Resultado:

 $V\left(Al\right)=-5 e V\left(Bob\right)=-5$

$\left(III\right) p\_{1}=0 e q\_{1}=0$

Comando:

p: matrix([0,1]);

q: matrix([0],[1]);

Al: matrix([-5,0],[-10,-1]);

Bob: matrix([-5,-10],[0,-1]);

Resultado:



Calculando o valor dos jogos V(Al) e V(Bob):

Comando:

 VAl: p.Al.q;

VBob: p.Bob.q;

Resultado:

 $V\left(Al\right)=-1 e V\left(Bob\right)=-1$

 Vamos analisar os resultados das três situações apresentadas. Para (I) temos o valor do jogo para ambos em -4, indicando que o jogo só oferece perdas, em média de 4 anos por rodada, em (II) ambos com -5, ou seja, os dois confessam tentando tirar vantagem, um em cima do outro, ficando presos por 5 anos e (III) tanto um quanto outro com -1 que é o caso de um pensamento frio e racional das duas partes. Em outros termos Al e Bob preferem não arriscar a serem libertos devido há a possibilidade de serrem presos por 10 anos caso alguém confesse então assumem a pena de 1 ano. Mas e o resultado -4 para ambos? Isto indica que o problema não oferece nenhum benefício se houver indecisão na tomada da resposta. Para alguém ser liberado deveríamos configurar o sistema com:

$$\left\{\begin{array}{c}p\_{1}>p\_{2}\\q\_{1}<q\_{2}\\p\_{1}+p\_{2}=1\\q\_{1}+q\_{2}=1\end{array}\right.⟹\left\{\begin{array}{c}Al livre\\Bob preso\end{array}\right. e \left\{\begin{array}{c}p\_{1}<p\_{2}\\q\_{1}>q\_{2}\\p\_{1}+p\_{2}=1\\q\_{1}+q\_{2}=1\end{array}\right.⟹\left\{\begin{array}{c}Al preso\\Bob livre\end{array}\right.$$

 Qualquer valor que estiver nestas condições, o sistema terá sua estratégia com resultados definidos. Mas será que existe alguma configuração que seja ótima para o problema? Para avaliar este questionamento vamos considerar as probabilidades como variáveis.

Comando:

p: matrix([p1,1-p1]);

q: matrix([q1],[1-q1]);

Al: matrix([-5,0],[-10,-1]);

Bob: matrix([-5,-10],[0,-1]);

Resultado:

Calculando o valor dos jogos V(Al) e V(Bob):

Comando:

 VAl: p.Al.q;

VBob: p.Bob.q;

Resultado:



Comando:

 fullratsimp(expand((1-p1)\*(-9\*q1-1)-5\*p1\*q1));

 fullratsimp(expand((1-p1)\*(q1-1)+p1\*(-5\*q1-10\*(1-q1))));

Resultado:



Comando:

solve([(4\*p1-9)\*q1+p1-1], [p1]);

solve([(4\*p1+1)\*q1-9\*p1-1], [q1]);

Resultado:



 Repare que a estratégia ótima para Al é a mesma estratégia ótima para Bob, sendo que ambas são dependentes da tomada de decisão o outro. Vamos analisar somente a de V(Al) e tirar algumas conclusões.



 Devemos fazer um fator de correção na relação de dependência entre as variáveis, pois como resolvemos o sistema com probabilidade de 1 para Al e 1 para Bob, afinal o sistema se encontra dividido para 2 incógnitas de cada jogador, daí aplicamos o fator de correção de 1/2.

 Logo, a função corrigida será:



 Um gráfico certamente ajuda a avaliar a situação:

Comando:

wxplot2d([(9\*x+1)/(8\*x+2)], [x,0,1], [y,0,1])$

 Resultado:



Figura 1: Gráfico de $p\_{1}=y$ em função de $q\_{1}=x;\left(x,y\right)\in [0,1]$.

 Unindo informações do gráfico e estudando os limites de alguns pontos críticos do sistema, o valor inicial com $q\_{1}=0$, o ponto do domínio da função $q\_{1}=1/4$ e o valor final $q\_{1}=1$.

$$p\_{1}\left(q\_{1}\right)⟶\left\{\begin{array}{c}\lim\_{q\_{1}⟶0}\frac{9q\_{1}+1}{8q\_{1}+2}=\frac{1}{2}\\\lim\_{q\_{1}⟶^{1}/\_{4}}\frac{9q\_{1}+1}{8q\_{1}+2}=\frac{13}{16}\\\lim\_{q\_{1}⟶1}\frac{9q\_{1}+1}{8q\_{1}+2}=1\end{array}\right.\left\{\begin{array}{c}\lim\_{q\_{1}⟶0}\frac{9q\_{1}+1}{8q\_{1}+2}=\frac{1}{2}\\\lim\_{q\_{1}⟶^{1}/\_{4}}\frac{9q\_{1}+1}{8q\_{1}+2}=\frac{13}{16}\\\lim\_{q\_{1}⟶1/2}\frac{9q\_{1}+1}{8q\_{1}+2}=\frac{11}{12}\\\lim\_{q\_{1}⟶1}\frac{9q\_{1}+1}{8q\_{1}+2}=1\end{array}\right.$$

 Criamos as conclusões: Se Bob for impulsivo ao extremo temos:

$$\left\{\begin{array}{c}q\_{1}⟶0\\q\_{2}⟶1\end{array}\right.⟹\left\{\begin{array}{c}p\_{1}⟶1/2\\p\_{2}⟶1/2\end{array}\right.⟹\left\{\begin{array}{c}p\_{1}=p\_{2}\\q\_{1}<q\_{2}\end{array}\right.$$

Logo Al terá um impasse e será indeciso entre confessar ou negar. Caso Bob pense em negar, ainda sendo emotivo:

$$\left\{\begin{array}{c}q\_{1}⟶1/4\\q\_{2}⟶3/4\end{array}\right.⟹\left\{\begin{array}{c}p\_{1}⟶13/16\\p\_{2}⟶3/16\end{array}⟹\left\{\begin{array}{c}p\_{1}>p\_{2}\\q\_{1}<q\_{2}\end{array}\right.\right.$$

Então há uma excelente probabilidade Al confessar e ser solto. Aqui encontramos o ponto estratégico ótimo do problema. Perceba que $1/4$ é o valor que $q\_{1}$ não pode assumir devido a condição de seu domínio na função.

Se Bob estiver dividido meio a meio entre as opções, o quadro será:

$$\left\{\begin{array}{c}q\_{1}⟶1/2\\q\_{2}⟶1/2\end{array}\right.⟹\left\{\begin{array}{c}p\_{1}⟶11/12\\p\_{2}⟶1/12\end{array}⟹\left\{\begin{array}{c}p\_{1}>p\_{2}\\q\_{1}=q\_{2}\end{array}\right.\right.$$

Tudo indica que se Bob estiver nestas condições, o melhor para Al é confessar o crime, mesmo havendo a possibilidade de ser inocente.

Por último, se Bob for extremamente racional o sistema terá:

$$\left\{\begin{array}{c}q\_{1}⟶1\\q\_{2}⟶0\end{array}\right.⟹\left\{\begin{array}{c}p\_{1}⟶1\\p\_{2}⟶0\end{array}\right.⟹\left\{\begin{array}{c}p\_{1}>p\_{2}\\q\_{1}>q\_{2}\end{array}\right.$$

É quase certo que os dois ficarão presos por 5 anos. Podemos até expandir o raciocínio em que Al e Bob estivessem em um novo problema com a condição adicional de mesmo sem ter contato direto um com outro, Al poderia influenciar Bob a ser mais emotivo do que racional, mesmo sem se conhecerem, por intermédio de outras pessoas que fossem de seu convívio em comum por meio de estratégia psicológica. Para isso poderíamos desenrolar a nova situação com o auxílio de teoria de grafos aplicada em tomada de decisão, mas esta é uma tarefa para outro momento.



Figura 2: Gráfico de $p\_{1}=y$ em função de $q\_{1}=x;\left(x,y\right)\in [0,1]$

e seus pontos críticos.

Vamos avaliar na figura 2 a curva contida entre os pontos A e D, seus subsegmentos e respectivos comprimentos. O segmento AB equivale a aproximadamente 34,34% de AD, BC a 22,90% de AD e CD, 42,76% de AD. Isso gera regiões de ocorrência.

$$\overline{AB}≅34,34\%⟹\begin{array}{c}q\_{1}\in \left]0,\frac{1}{4}\right]; p\_{1}\in \left]\frac{1}{2},\frac{13}{16}\right]\end{array}$$

$$\overline{BC}≅22,90\%⟹\begin{array}{c}q\_{1}\in \left]\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]; p\_{1}\in \left]\frac{13}{16},\frac{11}{12}\right]\end{array}$$

$$\overline{CD}≅42,76\%⟹\begin{array}{c}q\_{1}\in \left]\frac{1}{2},1\right]; p\_{1}\in \left]\frac{11}{12},1\right]\end{array}$$

 O problema apresentado é muito interessante e nos faz a pensar na situação adicional em que poderiam esperar seus advogados, criando uma nova regra para o jogo: Se aguardar o advogado de defesa, então temos: Quem confessar será liberto e o outro responderá o processo, preso, com pena de 15 anos, se negar responderá preso por um processo de 5 anos e o outro liberado, e por último, caso os dois prefiram aguardar os advogados, ambos serão acusados para a pena de10 anos, respondendo o processo, presos.

|  |  |
| --- | --- |
| $$(Al,Bob)$$ | **Bob** |
| **Confessar** | **Negar** | **Advogado** |
| **Al** | **Confessar** | $$(-5,-5)$$ | $$(0,-10)$$ | $$(0,-15)$$ |
| **Negar** | $$(-10, 0)$$ | $$(-1,-1)$$ | $$(-5, 0)$$ |
| **Advogado** | $$(-15, 0)$$ | $$(0,-5)$$ | $$(-10,-10)$$ |

 Para evitar procedimentos repetitivos, vamos considerar a matriz de Al para efeito de cálculos e otimização do sistema.

$$V\left(Al\right)=\left[\begin{matrix}p\_{1}&p\_{2}&1-(p\_{1}+p\_{2})\end{matrix}\right].\left[\begin{matrix}-5&0&0\\-10&-1&-5\\-15&0&-10\end{matrix}\right].\left[\begin{array}{c}q\_{1}\\q\_{2}\\1-(q\_{1}+q\_{2})\end{array}\right] $$

 O valor do jogo será:

 Colocando o jogo em equilíbrio, inserindo o fator de correção de 1/3, que segue o princípio de que temos 3 variáveis em cada jogo, com VAl = 0 e resolvendo a equação encontramos:



 Repare que para otimização da situação-problema devemos ter algum ponto inicial entre os oponentes, ou seja, é necessário avaliar qual a probabilidade de Bob em $q\_{1}$ e $q\_{2}$ para ver qual será a melhor probabilidade de jogo para $p\_{1}$, $p\_{2}$ e $p\_{3}$. Teremos um trabalho exaustivo para encontrar os parâmetros ideais de cada situação, mas para este problema podemos usar a técnica do “ponto de sela”. O procedimento é relativamente simples e basta procurar a linha que tem o menor valor e ao mesmo tempo este valor deve ser o maior da coluna a que pertence. Vamos conferir a matriz do jogo de Al:

$$Al=\left[\begin{matrix}-5&0&0\\-10&-1&-5\\-15&0&-10\end{matrix}\right]$$

 Agora procuramos a linha com o menor valor. Na linha 3 temos o elemento $a\_{31}=-15$, porém está na coluna 1 e lá não é o maior valor. Com esta referencia é fácil perceber que $a\_{11}=-5$ é o menor da linha e o maior da coluna ao mesmo tempo, logo será o ponto de sela. Neste ponto de sela temos que Al e Bob confessarão então esta será a estratégia dominante do problema.

 Pode ser que o jogo não apresente nenhum ponto de sela ou até mesmo vários pontos, logo devemos usar a técnica da estratégia dominante, seguindo o mesmo princípio. Procuramos estudar a coluna que é dominada e consequentemente “retirada” do jogo. A coluna 2 tem suas coordenadas menores em relação a 3, sobram coluna 1 e 3. A coluna 1 tem coordenadas menores que a 2, sobra a coluna 1. Conferindo a coluna 1 a coordenada de maior valor está na linha 1, logo $a\_{11}=-5$ é a solução do jogo. Devemos alertar que esta técnica funciona somente com jogo de soma zero, ou seja, se um jogador ganha x, o oponente perde x. Este é o método de Von Neumann. Caso o problema apresente vários pontos de sela, procuramos o que for mais vantajoso.

**5. Conclusões:**

 Teoria dos Jogos é uma ferramenta para estimar resultados que inicialmente são subjetivos e que podem ser afetados pelo perfil psicológico do jogador, por outro lado temos situações que são dominantes e tendem a ser a resposta mais provável quando comparada a outras. Neste trabalho estudamos o modelo de jogo 2x2 com soma zero, o que implica que para cada valor ganho do jogador A, o jogador B perde a mesma quantidade, gerando uma matriz de compensação equivalente para ambos e encontramos sua função de otimização.

Ao encontrar os pontos críticos do problema encontramos também as soluções otimizadas, por consequência da soma zero e, à medida que o tempo passa, os jogadores saem do estado emocional predominante e entram com a tomada de decisão mais racional, o que pode ser visto na Figura 1. Se a equação for parametrizada em função do tempo, o vetor direcional segue para 1 o que implica em pensamento mais racional que emocional e, com o problema Dilema do Prisioneiro, ambos provavelmente decidiriam por negar, mesmo que a opção de confessar fosse dominante.

Outro ponto interessante são os comprimentos da curva de probabilidade, conforme a Figura 2. Nesta imagem encontramos faixas de transição do estado emocional para o estado racional e os pontos críticos identificados ao longo da resolução. Podemos avaliar que há uma predominância de 34,34% para se manter no estado emocional e tomar uma decisão precipitada, com 22,90% temos o período de indecisão, momento o qual inicia a avaliação das possibilidades e, por fim, 42,76% de chance para agir com racionalidade, de modo pensado e com as possibilidades testadas. Quanto mais tempo se leva para tomar uma decisão, maior é a chance de ser racional para o problema proposto.

Acreditamos que seja o caso de estudar futuramente o raciocínio em que um jogador pode influenciar o outro, diretamente, tendo contato com o oponente ou indiretamente por intermédio de outras pessoas que fossem de seu convívio em comum, por meio de estratégia psicológica usando teoria de grafos em tomada de decisão.

**6. Referências bibliográficas:**

ALMEIDA, Alecsandra Neri de. Teoria dos Jogos: As origens e os fundamentos da Teoria dos Jogos. Centro Universitário Metropolitano de São Paulo, 2006.

ANTON, Howard, Chris Rorres. Álgebra Linear com Aplicações. 8ª Edição. ARTMED Editora S/A, 2000. ISBN 0-471-17052-6.

CABRAL, Marco, Paulo Goldfeld. Curso de Álgebra Linear: Fundamentos e Aplicações. 2ª Edição. Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2008.

CONWAY, John H., Smith, Derek A., On Quaternions and Octonions. Their geometry, arithmetic, and simmetry, A. K. Peters, Ltd. ISBN 1-56881-134-9

HUIZINGA, Johan. Homo Ludens: A Study of the Play-Element in Culture (em inglês). [S.l.]: Beacon Press, 1971. ISBN 978-0807046814.

MACHADO, Alexandre N. As Investigações Filosóficas de Wittgenstein: Estilo e Método. II Colóquio Prazer do Texto, UFBA, 2006.

PAIVA, Manoel Rodrigues. Matemática - Ensino Médio, vol. 2, Orientação Metodológica e Resolução de Exercícios Complementares. 1ª Edição. Editora Moderna, 2009. ISBN 978-85-16-06369-6.

SARTINI, Brígida Alexandre. et al. Uma Introdução a Teoria dos Jogos. II Bienal da SBM. Universidade Federal da Bahia, 2004.

STEWART, James. Cálculo, vol. 1. Tradução da 6ª Edição norte-americana. Cengage Learning Edições, 2010. ISBN 978-85-221-0660-8.