ESTUDO DO JOGO CLÁSSICO, O DILEMA DO PRISIONEIRO, POR TEORIA DOS JOGOS, COM USO DE FUNÇÃO POLINOMIAL DE PROBABILIDADE E ANÁLISE DOS PONTOS CRÍTICOS

Pedro Carvalho Brom[1]
[1]*Campus* Gama - Instituto Federal de Brasília
pcbrom@gmail.com

Artigo submetido em 18/09/2012 e aceito em 05/11/2012.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é avaliar o modelo clássico do jogo *Dilema do Prisioneiro* com a formalização da Teoria dos Jogos que pode ser modelada para jogos mais complexos, de competição com dois jogadores, munido de uma estratégia ótima para tomada de decisão, que pode ser aproveitada para analisar: Investimentos financeiros, aquisição de suprimentos, divisão de tarefas em empresas entre outros modelos matemáticos.
O estudo é fomentado de tal modo que pode ser abordado como iniciação da teoria básica de jogos.

PALAVRAS-CHAVE: Teoria dos Jogos, Álgebra Linear, Matrizes, Sistema Linear, Estratégias Ótimas.

STUDY OF CLASSIC GAME, THE PRISONER'S DILEMMA BY THEORY OF GAMES AND USING POLYNOMIAL FUNCTION OF PROBABILITY AND ANALYSIS OF CRITICAL POINTS

ABSTRACT

The aim of this study is to evaluate the classical model of the Prisoner's Dilemma game based on the formalization of the Game Theory which can be structured to more complex games, such as racing games for two players, in which optimal strategies are used when making decisions and that can also be used to analyze: Investments, purchase of supplies, division of tasks in a company among other math models. The study is fostered so that can be approached as initiation of the basic theory of games.

KEY-WORDS: Game Theory, Linear Algebra, Matrices, Linear System, Optimal Strategies.

ESTUDO DO JOGO CLÁSSICO, O DILEMA DO PRISIONEIRO, POR TEORIA DOS JOGOS, COM USO DE FUNÇÃO POLINOMIAL DE PROBABILIDADE E ANÁLISE DOS PONTOS CRÍTICOS

1 Introdução

Antes de iniciar com os procedimentos matemáticos da teoria dos jogos vamos conhecer um pouco mais sobre alguns jogos e suas origens, iniciando pelo filósofo austríaco, naturalizado britânico, Ludwig Joseph Johann Wittgenstein (1889 - 1951).

Wittgenstein foi provavelmente o primeiro filósofo acadêmico a tentar criar uma definição para jogo. Ao estudar a arquitetura da racionalidade, em seu texto Investigações Filosóficas, cria o termo *jogos de linguagem*, indicando que o jogo percebe características de entretenimento com regras e indica, ainda, que jogos não podem ser representados por uma definição, devido ao seu formato apresentar um conjunto de características compatíveis dentre as definições possíveis.

Seu contemporâneo, Johan Huizinga (1872 - 1945), em sua obra, Homo Ludens, procura não definir e sim conceituar o que é jogo. Ao passar dos capítulos, Huizinga debate a temática sobre o que é o jogo, porém ao invés de definir, acaba indicando o que não é jogo para alinhar com os conceitos propostos, que de acordo com o autor, o jogo não deve ser competitivo e somente poderia ser considerado se trabalhado apenas para a diversão e entretenimento. De forma sucinta, diz que jogo é toda e qualquer atividade em que exista o praticante dele e seu jogador aceita suas regras para participar. Estas regras em geral são fáceis de memorizar e dão a condição de início, meio e fim da atividade. No início são apresentados às regras aos jogadores, no meio ocorrem eliminatórias e no fim temos o vencedor. Nestes conceitos Johan indica que podem ter dois ou mais participantes, mas em sua grande maioria temos um grupo concorrendo diretamente com outro grupo, com o modelo de dois jogadores.

Algo totalmente diferente dos propósitos de Wittgenstein e Huizinga que parte da condição lúdica, ocorre na competição comercial como ferramenta para aumentar suas chances de sucesso. Atualmente a Teoria dos Jogos é um segmento da Matemática Aplicada que estuda situações algébricas e estratégias, em que os jogadores avaliam diferentes decisões para maximizar seu retorno. Teve seu desenvolvimento inicial como ferramenta para compreender o comportamento de sistemas econômicos, e, a partir de 1970 iniciaram os estudos massivos para evolução das espécies por seleção natural juntamente com o modelo “presa X predador” e equações de Lotka-Volterra em dinâmicas populacionais.

Atualmente a Teoria dos Jogos tem sido aplicada com sucesso em Ciências Políticas, Ciências Militares com Logística de Suprimentos e/ou Serviços, Ética, Economia, Filosofia e, recentemente, no Jornalismo, uma área que apresenta inúmeros e diversos jogos, competitivos e cooperativos. Por fim temos atuação na Ciência da Computação causando avanços na Inteligência Artificial e Cibernética com sistemas de Redes Neurais.

O objetivo deste artigo é avaliar o modelo clássico do jogo *Dilema do Prisioneiro* com a formalização da Teoria dos Jogos que pode ser modelada para jogos mais complexos, de competição com dois jogadores, munido de uma estratégia ótima para tomada de decisão, que pode ser aproveitada para analisar: Investimentos financeiros, aquisição de suprimentos, divisão de tarefas em empresas entre outros formatos. O estudo é fomentado de tal modo que pode ser abordado como iniciação da teoria básica de jogos.

2 Revisão de literatura

Neste tópico veremos apenas as operações que são essenciais para o pleno desenvolvimento das atividades. Deste modo podemos esperar com os itens de matrizes e sistemas lineares: representação de matrizes, condições para efetuar o produto entre matrizes, cálculo do produto matricial, representação de sistemas lineares, representação de sistemas lineares com notação matricial e recurso computacional para solução. Noções de probabilidades, limite e teoria dos jogos. A noção intuitiva de limite será abordada no tópico de problemas propostos por se tratar de apenas um ponto necessário em algumas operações de otimização. Estas operações básicas são ferramentas usuais em cálculo de otimização das matrizes envolvidas no sistema de compensação de jogo.

2.1 Sistemas lineares, representação de sistemas lineares com notação matricial e solução com recurso computacional

As equações que compõem o conjunto de subequações necessárias para a resolução de um problema, sendo suas variáveis do primeiro grau, e, uma vez relacionadas, encontraram neste conjunto, o que chamamos de sistema de equações lineares.

Podemos representar o sistema linear genérico do seguinte modo:

$$\begin{cases} a_{11}.x_1 + \cdots + a_{1n}.x_n = b_1 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}.x_1 + \cdots + a_{mn}.x_n = m \end{cases}$$

Em que: $x_1, \cdots, x_n$ são variáveis ou incógnitas; a_{ij} são os coeficientes das variáveis, com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j < n$; b_i são os termos independentes, com $1 \leq i < m$.

Um sistema linear é classificado de acordo com o número de soluções que apresenta, assim sendo, existem três classificações: Sistema Impossível (SI), Sistema Possível e determinado (SPD) e Sistema Possível e Indeterminado (SPI). Para este trabalho temos especial interesse nos SPD e SPI para otimização de sistemas.

No tópico anterior de matrizes e produto matricial mostramos a forma geral da matriz dos coeficientes de um sistema linear e a partir desta notação matricial podemos avaliar o cálculo do determinante e consequentemente identificar a sua classificação.

Veja que se:

$$\begin{cases} a_{11}.x_1 + \cdots + a_{1n}.x_n = b_1 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}.x_1 + \cdots + a_{mn}.x_n = b_m \end{cases} = \begin{cases} a_{11}.x_1 + \cdots + a_{1j}.x_n = b_1 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{i1}.x_1 + \cdots + a_{ij}.x_n = b_m \end{cases}$$

Então:

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} \end{bmatrix}$$ tem o determinante $D(A)$

Logo, classificamos:

$$D(A) \neq 0 \Leftrightarrow SPD$$ e $$D(A) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} SPI \\ SI \end{cases}$$

Avaliando o caso de $D(A) = 0$, temos a condição definida em SPI ou SI, então avaliamos a inclinação das equações do sistema.

Seja, por exemplo, um sistema quadrado de ordem 2 e sua matriz dos coeficientes A:

$$\begin{cases} r_1: a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 = b_1 \ (I) \\ r_2: a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 = b_2 \ (II) \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Se $D(A) = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21} = 0 \Longrightarrow a_{11}.a_{22} = a_{12}.a_{21}$, e x_2 com solução dependente de x_1, então avaliamos a inclinação de I e II. A inclinação é calculada por:

$$m_I = -\frac{a_{11}}{a_{12}}$$ e $$m_{II} = -\frac{a_{21}}{a_{22}}$$

Como estamos avaliando paralelismo, temos $m_I = m_{II}$, o que gera $-\frac{a_{11}}{a_{12}} = -\frac{a_{21}}{a_{22}}$, ou reescrevendo, $\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \Longrightarrow a_{11}.a_{22} = a_{12}.a_{21}$. Repare que o determinante quando igualado a zero tem a mesma fórmula operada com as inclinações, logo para avaliar se duas retas são paralelas, apenas o cálculo do determinante igual a zero é suficiente. Já a condição de serem paralelas e colineares $r_1 \equiv r_2$ ou paralelas e não colineares $r_1 \approx r_2$, avaliamos o termo independente de cada equação:

$$\frac{b_1}{a_{12}} \text{ de (I)} = \frac{b_2}{a_{22}} \text{de (II)} \Longrightarrow b_1.a_{22} = b_2.a_{12}$$

$$\Longrightarrow b_1.a_{22} - b_2.a_{12} = 0$$

Que é exatamente a equação do determinante da matriz de solução parcial em x_1, aqui chamada de matriz X_1:

$X_1 = \begin{bmatrix} a_{12} & b_1 \\ a_{22} & b_2 \end{bmatrix}$

$D(X_1) = b_1 . a_{22} - b_2 . a_{12}$

Podemos concluir que para estar na condição de retas paralelas e colineares a condição será:

$D(A) = 0$ e $D(X_1) = 0$ (SPI)

E para serem retas paralelas e não colineares a condição será:

$D(A) = 0$ e $D(X_1) \neq 0$ (SI)

Repare que se temos SPI, podemos encontrar a matriz solução, com a possibilidade de ser composta por b_1, b_2, ..., b_m, contendo $b_1 = b_2 = \cdots = b_{(m-1)} = b_m = 0$, então dizemos que o sistema linear é homogêneo e se tratando de um SPI com $D(A) = 0$ e afirmamos que há soluções diferentes da trivial $(0,0,0)$.

Já a resolução de sistemas lineares é de fácil operação quando trabalhado em calculadora algébrica. Nesta breve atividade utilizaremos a calculadora algébrica “wxMáxima”, programa gratuito, que usa linhas de comando para efetuar operações. Aparentemente a calculadora não oferece restrições de número de linhas e de variáveis aceitas, logo os comandos citados abaixo seguem a mesma sintaxe para sistemas mais robustos. Podemos operar o cálculo de determinantes e resolução de sistemas, por exemplo:

Problema 1:

Resolver em (x_1, x_1): $\begin{cases} a_{11} . x_1 + a_{12} . x_2 = b_1 \\ a_{21} . x_1 + a_{22} . x_2 = b_2 \end{cases}$

Comando:

```
linsolve([a11*x1+a12*x2=b1, a21*x1+a22*x2=b2], [x1,x2]);
```

(aperte: Shift + Enter)

Resultado:

$$x_1 = -\frac{a_{22} b_1 - a_{12} b_2}{a_{12} a_{21} - a_{11} a_{22}}, x_2 = \frac{a_{21} b_1 - a_{11} b_2}{a_{12} a_{21} - a_{11} a_{22}}$$

Problema 2:

Calcular o determinante de $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

Comando:

```
determinant(matrix([a11,a12],[a21,a22]));
```

(aperte: Shift + Enter)

Resultado:

$$a_{11}b_{21} - a_{12}a_{21}$$

Problema 3:

Calcular o determinante de $X_1 = \begin{bmatrix} a_{12} & b_1 \\ a_{22} & b_2 \end{bmatrix}$

Comando:

determinant(matrix([a12,b1],[a22,b2]));
(aperte: Shift + Enter)

Resultado:

$$a_{12}b_2 - a_{22}b_1$$

2.2 Noções de probabilidade e notação matricial

O cálculo de probabilidades é um assunto antigo que vem chamando atenção da necessidade de prever resultados sem a prática real daquele evento. Em Teoria dos Jogos tratamos exatamente destes conceitos em que analisamos situações que são eminentes em determinado problema. Neste tópico vamos abordar o traço histórico da teoria da probabilidade e seu vínculo com a ideia de competição.

No ano de 1654, um jogador da sociedade parisiense, Chevalier de Mére (1607-1684), propôs ao matemático Blaise Pascal (1623-1662) algumas questões sobre probabilidade de vencer em jogos. Uma das questões abordadas foi: “Um jogo de dados entre dois adversários chega ao fim quando um dos jogadores vence três partidas. Se este jogo for interrompido antes do final, de que maneira cada um dos jogadores deverá ser indenizado?” (PAIVA, Manoel Rodrigues, 2009, p.272).

As reflexões deste problema e de outros informados por Mére levaram Pascal a se corresponder com Pierre de Fermat (1601-1665), o que desencadeou discussões sobre a necessidade de desenvolver novas teorias que mais tarde acabou recebendo o nome de teoria das probabilidades.

O pleno desenvolvimento das teorias da probabilidade e os avanços dos cálculos de probabilidade devem ser atribuídos a vários matemáticos. Agradecemos principalmente aos algebristas italianos Pacioli, Cardano e Tartaglia com as primeiras considerações calculadas acerca dos jogos e apostas. Dentre os matemáticos mais influentes, podemos destacar: Blaise Pascal, Pierre de Fermat, Jacob Bernoulli, Pierre Simon Laplace, Carl Friedrich Gauss e Lenis Poisson.

O início do cálculo das probabilidades e análise combinatória foi estabelecido por Pascal e Fermat, baseado em apostas no jogo de dados levantando diversas hipóteses e seus possíveis resultados, garantindo o espaço da teoria das probabilidades como uma ciência.

Bernoulli contribuiu em vários procedimentos, que vão desde combinações e permutações simples até a classificação binomial. Laplace formulou a regra de sucessão enquanto Gauss estabelecia o método dos mínimos quadrados que serviu de base para a regressão polinomial univariada até a multivariada e também a lei das distribuições das probabilidades, que ficou conhecida como “curva normal” ou “curva de Gauss”.

Atualmente os estudos relacionados às probabilidades são utilizados em diversas situações, pois possuem axiomas, teoremas e definições bem incisivos, cuja aplicação principal diz respeito ao estudo da equidade dos jogos e seus respectivos prêmios.

Quanto ao conhecimento de probabilidade necessário para desenvolver a proposta deste trabalho, se resume em identificar o espaço amostral e os eventos que o compõem e como devemos criar uma matriz de eventos.

Podemos definir o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório como espaço amostral e qualquer subconjunto deste espaço amostral é chamado de evento. Por exemplo, um jogo de cara e coroa. Ao lançar uma moeda pode sair apenas cara ou coroa, com 1 elemento em cada situação, e o espaço amostral será {cara, coroa} com 2 elementos. Outro exemplo é o jogo de lançamento de um dado de seis faces. Seus resultados podem ser 1, 2, 3, 4, 5 ou 6, com 1 elemento, portanto $n(A)(AEp) = 1$. O conjunto E = {1, 2, 3, 4, 5, 6} é o espaço amostral, com o total de 6 elementos, então dizemos "$n(E) = 6$".

Uma vez que o espaço amostral e evento estão claros, partimos para a probabilidade, que nada mais é do que a razão da quantidade de eventos favoráveis pela quantidade de eventos possíveis, portanto:

$$P = \frac{n(Ep)}{n(E)}$$

Sendo *P* a probabilidade do evento favorável, $n(Ep)$ o número de eventos favoráveis e $n(E)$ o número de eventos possíveis do experimento. Como $n(Ep) \leq n(E)$, então $0 \leq P = \frac{n(Ep)}{n(E)} \leq 1$, com $n(E)$ finito e não vazio. Isto quer dizer que a soma das probabilidades $P_1 + P_2 + \cdots + P_{x-1} + P_x = 1$.

As partes, $P_x = \frac{n(Ep_x)}{n(E)}$, podem ser escritas matricialmente em uma coluna:

$$P = (a_{i1})_{m\times 1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}; com \begin{cases} a_{11} = P_1 \\ \quad \dots \\ a_{m1} = P_x \end{cases}; \ x = m \in \mathbb{N}^*$$

Ou em formato de uma linha:

$$P = \left(a_{1j}\right)_{1\times n} = [a_{11} \quad \dots \quad a_{1n}]; com \begin{cases} a_{11} = P_1 \\ \quad \dots \\ a_{m1} = P_x \end{cases}; \ x = n \in \mathbb{N}^*$$

Com a notação matricial podemos efetuar a multiplicação de eventos possíveis entre 2 ou mais sistemas, gerando a taxa de retorno do jogo, ponto que será detalhado posteriormente nos problemas propostos, ou a partir da matriz de compensação podemos encontrar as probabilidades que maximizam os ganhos sobre o oponente, então é fácil perceber que o tanto o cálculo matricial e a distribuição de probabilidades estão ligadas diretamente com os problemas de competição direta ou indireta.

2.3 Principais pontos sobre a Teoria dos Jogos

Os jogos de tabuleiros, dados, cartas, jogos de salão e outros, sempre serviram de entretenimento para divertir a humanidade desde a formação das primeiras civilizações. Estes jogos colocam pessoas em situações de vencer ou perder, a partir das escolhas feitas no início da partida. O jogo, enquanto lúdico, se torna uma ferramenta para o desenvolvimento das pessoas, e com o surgimento da teoria da probabilidade, ganhou novas dimensões para maximizar os lucros de uma partida. Seria esta uma forma de trapaça?

Os estudos sobre a teoria da probabilidade desenvolvidos por Pascal e Fermat foram fundamentais para dar início método científicos aplicado em jogos de azar. Em seguida Antoine Augustin Cournot (1801-1877), matemático francês, com a análise do ponto de equilíbrio nas estratégias de jogos, formalizou um conceito especifico de equilíbrio que mais tarde foi generalizado por John Forbes Nash Jr (1928-Atual).

John Von Neumann (1903-1957), matemático húngaro-americano, provou o teorema “minimax”, segundo este teorema há sempre uma solução racional para um conflito bem definido entre dois indivíduos mesmo quando os interesses são completamente opostos. Minimax foi o teorema deixado em aberto pelo matemático francês Émile Borel (1871-1956).

A solução do teorema foi publicada no artigo: *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele* (Sobre a Teoria dos Jogos de Estratégia, 1928), e nesse período Oskar Morgenstern (1902-1977), economista alemão, publicou o livro: *Implicações Quantitativas do Comportamento do Máximo*, no qual discute a dicotomia entre o individualismo e a interação social para servir de base em análise econômica. Ao completar a dialética, conclui que quando indivíduos interagem, a racionalidade passa a ser relativa e se a racionalidade do individuo não é plena a maximização também não será, ou seja, para melhor resultado, o problema deve ser medido e calculado.

Morgenstern e Von Neumann (1903-1957) juntaram os seus trabalhos e publicaram, em 1944, a obra: *The Theory of Games and Economics Behavior* (Teoria dos Jogos e Comportamento Econômico, 1944), que além de desenvolver uma teoria de jogos para três ou mais participantes, afirma que o comportamento da economia depende basicamente da interação entre os agentes, já que ele afeta diretamente a elaboração de estratégias e tomadas de decisão dos produtores e dos consumidores.

Em 1950, Nash, matemático dos Estados Unidos, conquistou o prêmio Nobel de economia em 1994, um dos principais nomes da história da teoria dos jogos. Formado pela Universidade de Princeton, em 1950, com a tese *NonCooperative Games* (Jogos Não-Cooperativos, publicada em 1951) que lhe valeu mais tarde a indicação para o Nobel. Nesta tese, Nash provou a existência de ao menos um ponto de equilíbrio em jogos de estratégias para múltiplos jogadores, mas para que ocorra o equilíbrio é necessário que os jogadores se comportem racionalmente e não se comuniquem antes do jogo para evitar possíveis ações combinadas, o que certamente comprometeria os resultados do sistema.

O problema: *O Dilema do Prisioneiro* talvez seja o exemplo mais conhecido na teoria dos jogos, formulado por Albert W. Tucker em 1950, em um seminário para psicólogos na Universidade de Stanford, com a finalidade de ilustrar a dificuldade de se analisar certos tipos de jogos.

> Dois ladrões, Al e Bob, são capturados e acusados de um mesmo crime. Presos em selas separadas e sem poderem se comunicar entre si. O delegado de plantão faz seguinte proposta: cada um pode escolher entre confessar ou negar o crime. Se nenhum deles confessar, ambos serão submetidos a uma pena de 1 ano. Se os dois confessarem, então ambos terão pena de 5 anos. Mas se um confessar e o outro negar, então o que confessou será liberto e o outro será condenado a 10 anos de prisão. (SARTINI, Brígida Alexandre. et al., 2004, p.6).

Vamos avaliar os dados do problema. Al tem duas opções: Confessar ou negar o crime, do mesmo modo que Bob. Estas situações se cruzam gerando uma matriz de compensação. O sinal de negativo indica a perda referente à coordenada **(Al, Bob)**.

Tabela 1: Matriz de compensação de jogo.

(Al, Bob)		**Bob**	
		Confessar	**Negar**
Al	**Confessar**	$(-5,-5)$	$(0,-10)$
	Negar	$(-10,0)$	$(-1,-1)$

As matrizes de jogo são: $Al = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ -10 & -1 \end{bmatrix}$ e $Bob = \begin{bmatrix} -5 & -10 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ e veja que existe uma probabilidade de Al confessar ou negar, do mesmo modo que Bob também tem sua própria probabilidade. Estes valores dependem de diversos fatores sociais, mas vamos avaliar algumas situações para perceber como funciona a teoria dos jogos.

Na condição de Al pode ser vantajoso confessar se Bob negar, afinal ficará livre enquanto Bob preso por 10 anos. Por outro lado temos que se Al negar pensando em tirar vantagem da situação em que os dois neguem, minimizando o tempo na cadeia para 1 ano, Bob pode simplesmente confessar deixando então Al preso por 10 anos. De modo análogo Bob também avalia as suas possibilidades.

Veja que os dois devem efetuar a sua melhor estratégia, o que torna uma situação simplificada em competição estratégica para obter melhores resultados, e para cada situação temos benefícios/riscos e a teoria dos jogos vem para estudar estas possibilidades, gerando uma condição que minimize os riscos e maximize os resultados.

3. Analisando estratégias e otimização de resultados do jogo Dilema do Prisioneiro

Com base nas teorias fomentadas, retornamos ao caso de Al e Bob, e seu dilema que deve ser resolvido com as probabilidades de cada evento para ambos. Para isso vamos considerar P como matriz de Al e Q a matriz de Bob. Basicamente partimos da premissa de que: $P_1Pp_1, Q_1qQ_1 = \text{Confessar}; P_2Pp_2, Q_2qQ_2 = \text{Negar}.$ Então à partir deste ponto podemos propor os seguintes desenvolvimentos:

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \end{bmatrix} \text{ e } Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

As matrizes P e Q afetam o equilíbrio do jogo com sua média de compensação por rodada. Do tópico anterior, temos que $P_1Pp_1 + P_2pP_2 + \cdots + P_{x-1}pP_{x-1} + P_xpP_x = 1$, logo podemos perceber com facilidade que:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 = 1 \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_2 = 1 - p_1 \\ q_2 = 1 - q_1 \end{cases} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} p_1 & 1 - p_1 \end{bmatrix} \text{ e } Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ 1 - q_1 \end{bmatrix}$$

O valor do jogo de Al "V(Al)" é definido por P.Al.Q e o jogo de Bob "V(Bob)" por P.Bob.Q.

$$V(Al) = \begin{bmatrix} p_1 & 1 - p_1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ -10 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} q_1 \\ 1 - q_1 \end{bmatrix}$$

$$V(Bob) = \begin{bmatrix} p_1 & 1 - p_1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -5 & -10 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} q_1 \\ 1 - q_1 \end{bmatrix}$$

Vamos fazer algumas considerações para estudar o comportamento do jogo:

$\boldsymbol{(I)\ p_1 = \frac{1}{2}\ e\ q_1 = \frac{1}{2}}$

Comando:

```
p: matrix([1/2,1/2]);
q: matrix([1/2],[1/2]);
Al: matrix([-5,0],[-10,-1]);
Bob: matrix([-5,-10],[0,-1]);
```

Resultado:

$$p = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}; Al = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -10 & -1 \end{pmatrix}; Bob = \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculando o valor dos jogos V(Al) e V(Bob):

Comando:

```
VAl: p.Al.q;
VBob: p.Bob.q;
```

Resultado:

$V(Al) = -4$ e $V(Bob) = -4$

$\boldsymbol{(II)\ p_1 = 1\ e\ q_1 = 1}$

Comando:

```
p: matrix([1,0]);
q: matrix([1],[0]);
Al: matrix([-5,0],[-10,-1]);
```

Bob: matrix([-5,-10],[0,-1]);

Resultado:

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix};\ q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ Al = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -10 & -1 \end{pmatrix};\ Bob = \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculando o valor dos jogos V(Al) e V(Bob):

Comando:
VAl: p.Al.q;
VBob: p.Bob.q;

Resultado:
$V(Al) = -5$ e $V(Bob) = -5$

$(III)\ p_1 = 0\ e\ q_1 = 0$

Comando:
p: matrix([0,1]);
q: matrix([0],[1]);
Al: matrix([-5,0],[-10,-1]);
Bob: matrix([-5,-10],[0,-1]);

Resultado:

$$p = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix};\ q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};\ Al = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -10 & -1 \end{pmatrix};\ Bob = \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculando o valor dos jogos V(Al) e V(Bob):

Comando:
VAl: p.Al.q;
VBob: p.Bob.q;

Resultado:
$V(Al) = -1$ e $V(Bob) = -1$

Vamos analisar os resultados das três situações apresentadas. Para (I) temos o valor do jogo para ambos em -4, indicando que o jogo só oferece perdas, em média de 4 anos por rodada, em (II) ambos com -5, ou seja, os dois confessam tentando tirar vantagem, um em cima do outro, ficando presos por 5 anos e (III) tanto um quanto outro com -1 que é o caso de um pensamento frio e racional das duas partes. Em outros termos Al e Bob preferem não arriscar a serem libertos devido há a possibilidade de serrem presos por 10 anos caso alguém confesse então assumem a pena de 1 ano. Mas e o resultado -4 para ambos? Isto indica que o problema não oferece nenhum benefício se houver indecisão na tomada da resposta. Para alguém ser liberado deveríamos configurar o sistema com:

$$\begin{cases} p_1 > p_2 \\ q_1 < q_2 \\ p_1 + p_2 = 1 \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Al\ livre \\ Bob\ preso \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} p_1 < p_2 \\ q_1 > q_2 \\ p_1 + p_2 = 1 \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Al\ preso \\ Bob\ livre \end{cases}$$

Qualquer valor que estiver nestas condições, o sistema terá sua estratégia com resultados definidos. Mas será que existe alguma configuração que seja ótima para o problema? Para avaliar este questionamento vamos considerar as probabilidades como variáveis.

Comando:

```
p: matrix([p1,1-p1]);
q: matrix([q1],[1-q1]);
Al: matrix([-5,0],[-10,-1]);
Bob: matrix([-5,-10],[0,-1]);
```

Resultado:

$$p = \begin{pmatrix} p_1 & 1 - p_1 \end{pmatrix};\ q = \begin{pmatrix} q_1 \\ 1 - q_1 \end{pmatrix};\ Al = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -10 & -1 \end{pmatrix};\ Bob = \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculando o valor dos jogos V(Al) e V(Bob):

Comando:

```
VAl: p.Al.q;
VBob: p.Bob.q;
```

Resultado:

$$V(Al) = (1 - p_1)(-9q_1 - 1) - 5p_1q_1$$

$$V(Bob) = (1 - p_1)(q_1 - 1) + p_1(-5q_1 - 10(1 - q_1))$$

Comando:

```
fullratsimp(expand((1-p1)*(-9*q1-1)-5*p1*q1));
fullratsimp(expand((1-p1)*(q1-1)+p1*(-5*q1-10*(1-q1))));
```

Resultado:

$$V(Al) = (4p_1 - 9)q_1 + p_1 - 1$$

$$V(Bob) = (4p_1 + 1)q_1 - 9p_1 - 1$$

Comando:

```
solve([(4*p1-9)*q1+p1-1], [p1]);
solve([(4*p1+1)*q1-9*p1-1], [q1]);
```

Resultado:

$$V(Al): p_1 = \frac{9q_1 + 1}{4q_1 + 1}$$

$$V(Bob): q_1 = \frac{9p_1 + 1}{4p_1 + 1}$$

Repare que a estratégia ótima para Al é a mesma estratégia ótima para Bob, sendo que ambas são dependentes da tomada de decisão o outro. Vamos analisar somente a de V(Al) e tirar algumas conclusões.

$$V(Al): p_1 = \frac{9q_1 + 1}{4q_1 + 1}$$

Devemos fazer um fator de correção na relação de dependência entre as variáveis, pois como resolvemos o sistema com probabilidade de 1 para Al e 1 para Bob, afinal o sistema se encontra dividido para 2 incógnitas de cada jogador, daí aplicamos o fator de correção de 1/2.

Logo, a função corrigida será:

$$V(Al): p_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{9q_1 + 1}{4q_1 + 1}\right) \Rightarrow p_1 = \frac{9q_1 + 1}{8q_1 + 2}$$

Um gráfico certamente ajuda a avaliar a situação:

Comando:

```
wxplot2d([(9*x+1)/(8*x+2)], [x,0,1], [y,0,1])$
```

Resultado:

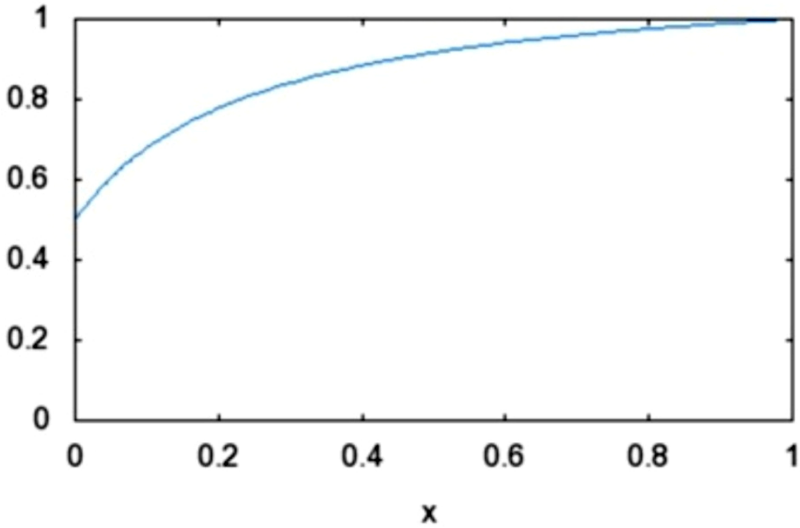

Figura 1: Gráfico de $p_1 = y$ em função de $q_1 = x; (x,y) \in [0,1]$ da função: $p_1 = \frac{9q_1 + 1}{8q_1 + 2}$

Unindo informações do gráfico e estudando os limites de alguns pontos críticos do sistema, o valor inicial com $q_1 = 0$, o ponto do domínio da função $q_1 = 1/4$ e o valor final $q_1 = 1$.

$$p_1(q_1) \longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{q_1 \to 0} \dfrac{9q_1 + 1}{8q_1 + 2} = \dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{q_1 \to {}^1/_4} \dfrac{9q_1 + 1}{8q_1 + 2} = \dfrac{13}{16} \\ \lim\limits_{q_1 \to 1} \dfrac{9q_1 + 1}{8q_1 + 2} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{q_1 \to 0} \dfrac{9q_1 + 1}{8q_1 + 2} = \dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{q_1 \to {}^1/_4} \dfrac{9q_1 + 1}{8q_1 + 2} = \dfrac{13}{16} \\ \lim\limits_{q_1 \to 1/2} \dfrac{9q_1 + 1}{8q_1 + 2} = \dfrac{11}{12} \\ \lim\limits_{q_1 \to 1} \dfrac{9q_1 + 1}{8q_1 + 2} = 1 \end{cases}$$

Criamos as conclusões: Se Bob for impulsivo ao extremo temos:

$$\begin{cases} q_1 \longrightarrow 0 \\ q_2 \longrightarrow 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 \longrightarrow 1/2 \\ p_2 \longrightarrow 1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 = p_2 \\ q_1 < q_2 \end{cases}$$

Logo Al terá um impasse e será indeciso entre confessar ou negar. Caso Bob pense em negar, ainda sendo emotivo:

$$\begin{cases} q_1 \longrightarrow 1/4 \\ q_2 \longrightarrow 3/4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 \longrightarrow 13/16 \\ p_2 \longrightarrow 3/16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 > p_2 \\ q_1 < q_2 \end{cases}$$

Então há uma excelente probabilidade Al confessar e ser solto. Aqui encontramos o ponto estratégico ótimo do problema. Perceba que $1/4$ é o valor que q_1 não pode assumir devido a condição de seu domínio na função.

Se Bob estiver dividido meio a meio entre as opções, o quadro será:

$$\begin{cases} q_1 \longrightarrow 1/2 \\ q_2 \longrightarrow 1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 \longrightarrow 11/12 \\ p_2 \longrightarrow 1/12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 > p_2 \\ q_1 = q_2 \end{cases}$$

Tudo indica que se Bob estiver nestas condições, o melhor para Al é confessar o crime, mesmo havendo a possibilidade de ser inocente.

Por último, se Bob for extremamente racional o sistema terá:

$$\begin{cases} q_1 \longrightarrow 1 \\ q_2 \longrightarrow 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 \longrightarrow 1 \\ p_2 \longrightarrow 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 > p_2 \\ q_1 > q_2 \end{cases}$$

É quase certo que os dois ficarão presos por 5 anos. Podemos até expandir o raciocínio em que Al e Bob estivessem em um novo problema com a condição adicional de mesmo sem ter contato direto um com outro, Al poderia influenciar Bob a ser mais emotivo do que racional, mesmo sem se conhecerem, por intermédio de outras pessoas que fossem de seu convívio em comum por meio de estratégia psicológica. Para isso poderíamos desenrolar a nova situação com o auxílio de teoria de grafos aplicada em tomada de decisão, mas esta é uma tarefa para outro momento.

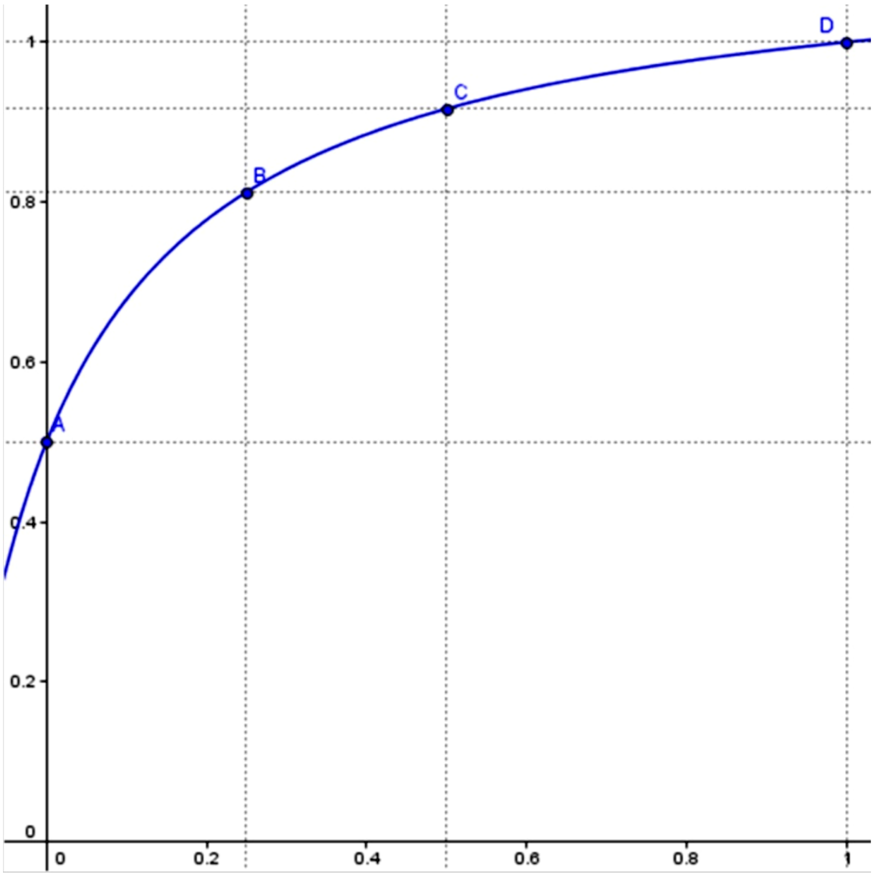

Figura 2: Gráfico de: $p_1 = \dfrac{9q_1 + 1}{8q_1 + 2}$; com $p_1 = y$ em função de $q_1 = x; (x,y) \in [0,1]$ e seus pontos críticos.

Vamos avaliar na Figura 2 a curva contida entre os pontos A e D, seus subsegmentos e respectivos comprimentos. O segmento AB equivale a aproximadamente 34,34% de AD, BC a 22,90% de AD e CD, 42,76% de AD. Isso gera regiões de ocorrência.

$$\overline{AB} \cong 34{,}34\% \Longrightarrow q_1 \in \left]0, \frac{1}{4}\right];\ p_1 \in \left]\frac{1}{2}, \frac{13}{16}\right]$$

$$\overline{BC} \cong 22{,}90\% \Longrightarrow q_1 \in \left]\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right];\ p_1 \in \left]\frac{13}{16}, \frac{11}{12}\right]$$

$$\overline{CD} \cong 42,76\% \Longrightarrow q_1 \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]; \; p_1 \in \left]\frac{11}{12}, 1\right]$$

O problema apresentado é muito interessante e nos faz a pensar na situação adicional em que poderiam esperar seus advogados, criando uma nova regra para o jogo: Se aguardar o advogado de defesa, então temos: Quem confessar será liberto e o outro responderá o processo, preso, com pena de 15 anos, se negar responderá preso por um processo de 5 anos e o outro liberado, e por último, caso os dois prefiram aguardar os advogados, ambos serão acusados para a pena de10 anos, respondendo o processo, presos.

Tabela 02: Matriz de compensação do jogo.

(Al, Bob)		Bob		
		Confessar	**Negar**	**Advogado**
Al	**Confessar**	$(-5,-5)$	$(0,-10)$	$(0,-15)$
	Negar	$(-10,0)$	$(-1,-1)$	$(-5,0)$
	Advogado	$(-15,0)$	$(0,-5)$	$(-10,-10)$

Para evitar procedimentos repetitivos, vamos considerar a matriz de Al para efeito de cálculos e otimização do sistema.

$$V(Al) = [p_1 \quad p_2 \quad 1-(p_1+p_2)].\begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ -10 & -1 & -5 \\ -15 & 0 & -10 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ 1-(q_1+q_2) \end{bmatrix}$$

O valor do jogo será:

$$V(Al) = (-6p_2 - 10p_1 + 10)q_2 - 5q_1 + 5p_2 + 10p_1 - 10$$

Colocando o jogo em equilíbrio, inserindo o fator de correção de 1/3, que segue o princípio de que temos 3 variáveis em cada jogo, com VAl = 0 e resolvendo a equação encontramos:

$$p_2 = -\frac{5(2p_1q_2 - 2q_2 + q_1 - 2p_1 + 2)}{3(6q_2 - 5)}$$

Repare que para otimização da situação-problema devemos ter algum ponto inicial entre os oponentes, ou seja, é necessário avaliar qual a probabilidade de Bob em q_1 e q_2 para ver qual será a melhor probabilidade de jogo para p_1, p_2 e p_3. Teremos um trabalho exaustivo para encontrar os parâmetros ideais de cada situação, mas para este problema podemos usar a técnica do "ponto de sela". O procedimento é relativamente simples e basta procurar a linha que tem o menor valor e ao mesmo tempo este valor deve ser o maior da coluna a que pertence. Vamos conferir a matriz do jogo de Al:

$$Al = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ -10 & -1 & -5 \\ -15 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

Agora procuramos a linha com o menor valor. Na linha 3 temos o elemento $a_{31} = -15$, porém está na coluna 1 e lá não é o maior valor. Com esta referencia é fácil perceber que $a_{11} = -5$ é o menor da linha e o maior da coluna ao mesmo tempo, logo será o ponto de sela. Neste ponto de sela temos que Al e Bob confessarão então esta será a estratégia dominante do problema.

Pode ser que o jogo não apresente nenhum ponto de sela ou até mesmo vários pontos, logo devemos usar a técnica da estratégia dominante, seguindo o mesmo princípio. Procuramos estudar a coluna que é dominada e consequentemente “retirada” do jogo. A coluna 2 tem suas coordenadas menores em relação a 3, sobram coluna 1 e 3. A coluna 1 tem coordenadas menores que a 2, sobra a coluna 1. Conferindo a coluna 1 a coordenada de maior valor está na linha 1, logo $a_{11} = -5$ é a solução do jogo. Devemos alertar que esta técnica funciona somente com jogo de soma zero, ou seja, se um jogador ganha x, o oponente perde x. Este é o método de Von Neumann. Caso o problema apresente vários pontos de sela, procuramos o que for mais vantajoso.

4. Conclusões

Teoria dos Jogos é uma ferramenta para estimar resultados que inicialmente são subjetivos e que podem ser afetados pelo perfil psicológico do jogador, por outro lado temos situações que são dominantes e tendem a ser a resposta mais provável quando comparada a outras. Neste trabalho estudamos o modelo de jogo 2x2 com soma zero, o que implica que para cada valor ganho do jogador A, o jogador B perde a mesma quantidade, gerando uma matriz de compensação equivalente para ambos e encontramos sua função de otimização.

Ao encontrar os pontos críticos do problema encontramos também as soluções otimizadas, por consequência da soma zero e, à medida que o tempo passa, os jogadores saem do estado emocional predominante e entram com a tomada de decisão mais racional, o que pode ser visto na Figura 1. Se a equação for parametrizada em função do tempo, o vetor direcional segue para 1 o que implica em pensamento mais racional que emocional e, com o problema Dilema do Prisioneiro, ambos provavelmente decidiriam por negar, mesmo que a opção de confessar fosse dominante.

Outro ponto interessante são os comprimentos da curva de probabilidade, conforme a Figura 2. Nesta imagem encontramos faixas de transição do estado emocional para o estado racional e os pontos críticos identificados ao longo da resolução. Podemos avaliar que há uma predominância de 34,34% para se manter no estado emocional e tomar uma decisão precipitada, com 22,90% temos o período de indecisão, momento o qual inicia a avaliação das possibilidades e, por fim, 42,76% de chance para agir com racionalidade, de modo pensado e com as possibilidades testadas. Quanto mais tempo se leva para tomar uma decisão, maior é a chance de ser racional para o problema proposto.

Acreditamos que seja o caso de estudar futuramente o raciocínio em que um jogador pode influenciar o outro, diretamente, tendo contato com o oponente ou indiretamente por intermédio de outras pessoas que fossem de seu convívio em comum, por meio de estratégia psicológica usando teoria de grafos em tomada de decisão.

Referências

ALMEIDA, Alecsandra Neri de. Teoria dos Jogos: As origens e os fundamentos da Teoria dos Jogos. São Paulo: Centro Universitário Metropolitano, 2006.

ANTON, Howard, Chris Rorres. Álgebra Linear com Aplicações. 8ª Edição. ARTMED Editora S/A, 2000.

CABRAL, Marco, Paulo Goldfeld. Curso de Álgebra Linear: Fundamentos e Aplicações. 2ª Edição. Rio de Janeiro: Editora UFRJ, 2008.

CONWAY, John H., Smith, Derek A., On Quaternions and Octonions. Their geometry, arithmetic, and simmetry, A. K. Peters, Ltd.

HUIZINGA, Johan. Homo Ludens: A Study of the Play-Element in Culture (em inglês). [S.l.]: Beacon Press, 1971. ISBN 978-0807046814.

MACHADO, Alexandre N. As Investigações Filosóficas de Wittgenstein: Estilo e Método. II Colóquio Prazer do Texto, UFBA, 2006.

PAIVA, Manoel Rodrigues. Matemática - Ensino Médio, vol. 2, Orientação Metodológica e Resolução de Exercícios Complementares. 1ª Edição. Editora Moderna, 2009. ISBN 978-85-16-06369-6.

SARTINI, Brígida Alexandre. et al. Uma Introdução a Teoria dos Jogos. II Bienal da SBM. Universidade Federal da Bahia, 2004.

STEWART, James. Cálculo, vol. 1. Tradução da 6ª Edição norte-americana. Cengage Learning Edições, 2010. ISBN 978-85-221-0660-8.