

Autores | Authors

Natan Sian das Neves*
natan.sian@gmail.com

Rovena Meirelles de Souza**
rovenams@gmail.com

Vitor Pancieri Pinheiro***
vitorpinheiro1987@gmail.com

**A IMPORTÂNCIA DOS MODELOS
TEÓRICOS E TÉCNICAS NUMÉRICAS NA
CONSTRUÇÃO DE UM ELO COM A PRÁTICA
DA ENGENHARIA ESTRUTURAL****THE IMPORTANCE OF THEORETICAL MODELS
AND NUMERICAL TECHNIQUES IN THE
CONSTRUCTION OF A LINK WITH THE
PRACTICE OF STRUCTURAL ENGINEERING**

Resumo: O avanço contínuo na área computacional gera diversas ferramentas facilitadoras na prática da engenharia, com implementação de softwares e consequente praticidade nos dimensionamentos e análises estruturais. Porém, é imprescindível que os profissionais correlatos a tais tarefas possuam uma base conceitual acerca da física-matemática associada tal como embasamento sobre métodos computacionais, para então, serem capazes de distinguir e interpretar os dados obtidos de forma assertiva. Desta forma, o presente artigo tem por finalidade ressaltar a interdependência entre o domínio dos modelos teóricos e a correta aplicação das técnicas numéricas na prática da engenharia estrutural. A sequência metodológica deste trabalho baseia-se na interpretação da relevância dos modelos estruturais clássicos na engenharia estrutural, através da avaliação de desempenho do método de diferenças finitas na solução aproximada dos mesmos. Tal quantificação de performance é executada via comparações com as devidas soluções analíticas disponíveis na literatura, seguida de análises e discussões que permitem a extrapolação dos resultados para uma ótica de dimensionamento estrutural. Em síntese, os experimentos numéricos exibiram excelente aderência em relação às soluções dos modelos diferenciais para lajes, vigas e pilares, no que tange ao comportamento do erro médio, consolidando a robustez da técnica numérica utilizada frente às aplicações de interesse. Por fim, constatado o desempenho satisfatório do método é possível quantificar de forma precisa os valores críticos requeridos em projetos estruturais.

Palavras-chave: Modelos teóricos; Diferenças finitas; Engenharia estrutural.

Abstract: *The continuous advancement in the computational area generates several facilitating tools in the engineering practice with software implementation and consequent practicality in the structural design and analysis. However, it is indispensable that practitioners related to such tasks have a conceptual basis on associated mathematical physics such as basing on computational methods, and then be able to distinguish and interpret the data obtained assertively. In this way, this article aims to highlight the interdependence between the domain of theoretical models and the correct application of numerical techniques in the practice of structural engineering. The methodological sequence of this work is based on the interpretation of the relevance of the classic structural models in the*

Recebido em: 21/08/2017

Aceito em: 14/02/2018

structural engineering through the evaluation of the performance of the finite difference method in the approximate solution of them. Such performance quantification is performed through comparisons with the appropriate analytical solutions available in the literature, followed by analyzes and discussions that allow the extrapolation of the results to a structural dimensioning optics. In summary, the numerical experiments showed excellent adhesion to the solutions of the differential models for slabs, beams and pillars, in relation to the average error behavior, consolidating the strength of the numerical technique used in front of the applications of interest. Finally, the satisfactory performance of the method can be quantified accurately the critical values required in structural projects.

Keywords: Theoretical models; Finite differences; Structural engineering.

INTRODUÇÃO

Os fenômenos físicos representativos nas mais diversas vertentes da ciência envolvem uma gama de complexidades, que por sua vez demandam grande volume de pesquisa e desenvolvimento. A fim de buscar uma compreensão de tais fenômenos, deve haver uma concatenação entre a formulação matemática e a interpretação física das variáveis correlatas, de forma a gerar um modelo matemático que se adeque ao problema de interesse.

Nesta linha, a aderência assertiva entre a matemática e a física, é capaz de estruturar modelos eficazes de engenharia, que por sua vez podem ser solucionados de com diversas abordagens, tais como, soluções analíticas, experimentais, estatísticas

ou com uso de técnicas numéricas computacionais, todavia, cada modo exibindo suas vantagens e desvantagens.

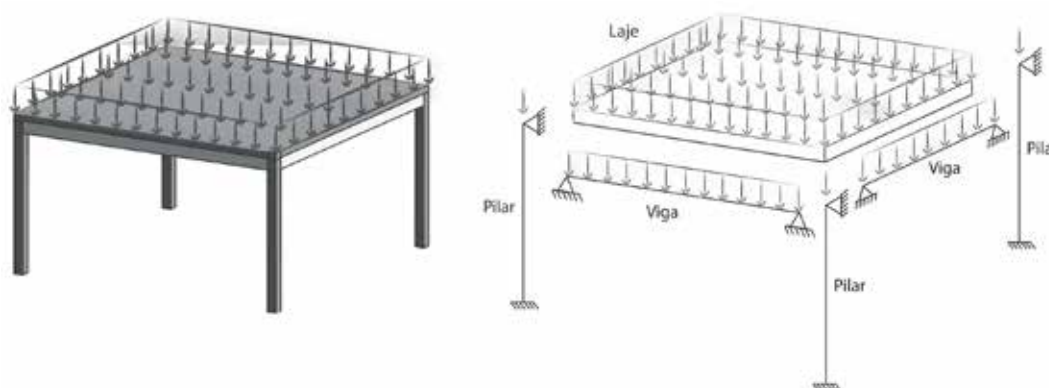
Uma das raízes da ciência é o pilar teórico, que através de ferramentas matemáticas descrevem fenômenos físicos, criando assim, modelos teóricos diferenciais. Tal linha de estudo requer um alto nível de conhecimento de física-matemática, devido a exigência de tratamentos matemáticos robustos e complexos, no que tange, tanto a formação teórica do modelo como na determinação das soluções analíticas das equações diferenciais estudadas (KREYSZIG, 2000). Desta forma, a obtenção das soluções exatas não é uma tarefa trivial e nem sempre de determinação possível. Em contrapartida, existem formas alternativas para tratar tais equações, tal como o uso de técnicas numéricas (CLÓVIS, 2013).

Os métodos numéricos computacionais têm aplicabilidade imediata em múltiplas áreas da engenharia, o que proporciona dinamização e praticidade na solução de problemas, que muitas das vezes são complexos e cuja experimentação seria inviável numa ótica de custo ou até mesmo não possível. A área de engenharia estrutural, por exemplo, demanda dimensionamentos de peças e elementos de construção civil via processo de cálculo extenso e cansativo. Neste contexto, as ferramentas computacionais proporcionam uma melhor configuração de custo-benefício, rapidez e otimização em projetos. Logo, esses recursos tornam-se uma ferramenta imprescindível na prática da engenharia civil (CARVALHO; FILHO, 2004).

MODELOS TEÓRICOS DIFERENCIAIS

Os modelos matemáticos são fundamentais na engenharia, tanto na compreensão da descrição dos fenômenos físicos como

Figura 1: Relação entre a estrutura real e o modelo de engenharia



Fonte: Acervo pessoal (2017)

ferramenta de indução conceitual do problema, isto é, revelam as propriedades e características físicas relevantes para tal fenômeno.

A engenharia civil de maneira geral consiste em um campo de pesquisa com alta frequência de problemas teóricos e práticos traduzidos por modelos matemáticos diferenciais, do qual dentre suas áreas, destaca-se a vertente estrutural que engloba desde mecânica dos solos a cálculos de estruturais de edificações, com os mais diversos graus de complexidade e realismo.

De fato, a análise de elementos estruturais reais na prática da engenharia constitui tarefa complexa e nem sempre possível de ser realizada, levando em conta todas as variáveis de influência. Por este fato, a engenharia procura simplificar as análises a fim de obter modelos matemáticos devidamente simplificados que forneçam resultados satisfatórios e suficientes para uma aplicação segura (CARVALHO; FILHO, 2004).

A Figura 1 apresenta este processo de divisão da estrutura em elementos isolados, onde ocorre a transição do modelo real para os modelos reticulares, o que permite uma análise precisa da influência de cada elemento no contexto da estrutura.

A metodologia a seguir apresenta e discute as equações diferenciais governantes de cada elemento estrutural mostrado na Figura 1. É importante ressaltar que, em uma ótica prática, uma estrutura contém diversos outros componentes e exibe uma gama de características aqui não consideradas, todavia, esta é uma análise restrita aos modelos teóricos das peças fundamentais em qualquer estrutura, evidenciando o caráter conceitual do vigente estudo.

No decorrer do processo de modelagem matemática de um problema físico é importante adequar o modelo matemático à aplicação estudada. Em diversas situações de engenharia algumas variáveis contidas no fenômeno possuem ordem de grandeza desprezível quando comparado com outra variável, fato este que induz a possíveis simplificações e restrições ao problema de interesse. Portanto, é fundamental ter discernimento para ajustar o modelo teórico ao problema alvo (KREYSZIG, 2000).

Neste fluxo, inicia-se a análise pelo comportamento da laje do sistema estrutural, onde nota-se que tal peça tem natureza geométrica tridimensional, o que demanda uma análise mais complexa e refinada. Porém, a maioria das aplicações práticas da engenharia podem ser modeladas pela teoria das placas delgadas ou de Kirchhoff (SZILARD, 2004). Tal teoria apresenta a deflexão da placa em termos de uma equação diferencial de quarta ordem, representada pela equação:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D} q(x, y); \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

Onde E é o módulo de elasticidade, a espessura da placa, é conhecido como coeficiente de Poisson, é o carregamento na superfície e ainda é dito como a rigidez à flexão da placa. Este modelo diferencial para placa possui algumas restrições e hipóteses simplificadoras conforme a teoria clássica elástica, relativas a materiais e comportamento mecânicos da estrutura, conforme apresentado em Timoshenko & Woinowsky (1959).

Caso o modelo de deformação de placas proposto por Kirchhoff não seja suficiente para a aplicação, pode-se utilizar uma teoria mais robusta, formulada por Reissner-Mindlin, onde se admite a influência das deformações transversais por cisalhamento, vide em Carvalho (2017) e Mindlin (1951).

O tratamento dos modelos comportamentais para vigas e pilares, possuem fundamentos teóricos semelhantes aos conceitos para placa delgada, porém em uma ótica unidimensional. Desta maneira, a teoria que rege esses elementos é a teoria de Euler-Bernoulli (HIBBELER, 2006). Para o caso estacionário, o modelo de deformação da viga é dado pela equação:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{1}{EI} q(x)$$

Onde E é o momento de inércia, e são respectivamente a flecha e o carregamento transversal à viga. Deste modo, este modelo fornece resultados satisfatórios em diversas situações de engenharia, porém, quando se considera uma viga com vão curto, tal teoria não possui um bom desempenho devido ao efeito da força cisalhante não ser desprezível. Neste cenário, utilizam-se modelos mais aprimorados, como, modelos de Vlasov ou Timoshenko (CARRER *et al.*, 2013; TIMOSHENKO, 1964).

Por fim, o pilar é um elemento que sofre ação de uma força de compressão no sentido vertical do plano cartesiano, gerando assim um momento. Deste modo, pode-se apresentar o modelo diferencial de pilar pela equação:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{P}{EI} \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

Onde y é a deformação do pilar após a flambagem e P é a carga atuante no pilar. Perceba que o modelo de Euler-Bernoulli descreve a deflexão de viga e a flambagem de colunas, o que indica que vários fenômenos distintos podem ter o mesmo modelo diferencial, elucidando o poder unificador da física-matemática (HIBBELER, 2006; KREYSZIG, 2000).

A priori, os modelos matemáticos apresentados para laje, viga e pilar são equações básicas e fundamentais para induzir uma noção do comportamento individual de cada peça separadamente dentro de um sistema estrutural. Por esta razão, os modelos matemáticos fornecem um mapeamento de

Figura 2: Comportamento deformacional da estrutura



Fonte: Acervo pessoal (2017)

como uma estrutura irá se deformar, desse modo, ilustra-se na Figura 2 a forma deformada da estrutura proposta na Figura 1.

A Figura 2 permite uma exposição didática do comportamento dos elementos estruturais, evidenciando um elo entre os modelos matemáticos e a deformação das peças, no entanto, é importante salientar que em dimensionamentos estruturais não é desejável que o pilar sofra flambagem, com possível geração de danos estruturais.

FORMULAÇÃO NUMÉRICA

Os métodos numéricos computacionais são ferramentas de enorme importância tanto na prática da engenharia como em uma ótica de pesquisa e ensino. O método pioneiro neste processo de solução numérica de modelos diferenciais é denotado por método das diferenças finitas.

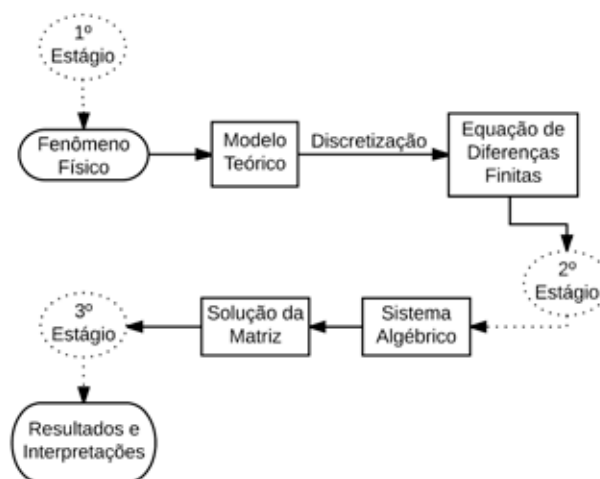
Com a evolução computacional e matemática surgiram novos métodos, como volumes e elementos finitos. O método mais recente que vem mostrando um bom desempenho em diversos problemas é o método de elementos de contorno (BREBBIA, 2016; NETO; MANSUR; BARCELOS, 2015).

METODOLOGICA DE SOLUÇÃO

A aplicação dos métodos numéricos na solução de equações governantes diferenciais de fenômenos físicos segue uma ótica sistêmica, onde é possível notar uma ligação entre inúmeros conhecimentos, como de modelagem e técnicas matemáticas, implementação de algoritmos computacionais, formas otimizadas de processamento e solução, entre outras (GILAT; SUBRAMANIAM, 2009).

Pensando nisto, pode-se dividir a aplicação de um método numérico em três estágios: formulação matemática e escolha do método, solução do sistema linear e análises e interpretação de resultados. Para ilustrar esta ideia, o fluxograma apresentado na Figura 3 evidencia as principais etapas de aplicação do MDF. É importante destacar que tais etapas e conceitos se mantêm em outros métodos numéricos, sendo que, cada método terá sua natureza e formulação distinta.

Figura 3 – Etapas e processos de aplicação do MDF



Fonte: Acervo pessoal (2017)

O primeiro estágio é destinado a todo processo de formulação e escolha apropriada do método ao problema estudado,

assim, para iniciar o processo de aplicação numérica é necessário conhecer e compreender o modelo teórico diferencial, pois isto é crucial para realizar o entendimento correto dos resultados. Somente a partir disto, é realizada a aproximação da equação diferencial por expressões discretas, ou seja, o MDF busca aproximar as derivadas contidas na equação de governo por expressões algébricas, como apresentado na equação:

$$\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_i \approx \frac{1}{(\Delta x)^2} (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})$$

Este processo de transferência do domínio contínuo para discreto é denotado como discretização. A partir disto, obtêm-se a equação de diferenças finitas (EDF), que representa a equação de governo na forma discreta. Neste estágio, é onde muitos pesquisadores da área numérica buscam aprimorar e determinar novas técnicas para a formulação matemática do método numérico, deixando-o mais eficiente e robusto.

O segundo estágio, por sua vez, aplica-se a EDF em cada ponto contido no domínio discreto, gerando assim um sistema algébrico matricial. A solução deste sistema pode ser feita com métodos diretos ou iterativos, como método de Gauss ou decomposição LU e Gauss-Seidel ou SOR. Esse estágio está ligado diretamente com o processo de otimização e desempenho computacional na resolução do sistema linear, acentuando ainda que, para problemas que possuem matrizes de alta ordem, a implementação de técnicas de otimização numérica são imprescindíveis (FORTUNA, 2000).

Por fim, o terceiro estágio é o momento em que ocorre todo o processo de tratamento de resultados, isto é, uma análise de validação dos dados obtidos em comparação com valores de referência, como, soluções analíticas, valores experimentais ou até mesmo simulações numéricas já validadas.

Nesta linha, todo o processo de validação e interpretação dos resultados é de competência de um profissional tecnicamente capacitado, a fim de distinguir e analisar os valores obtidos na simulação, para então, poder expor o fenômeno de forma correta ou até mesmo gerar um melhor custo para a aplicação estudada (CLÓVIS, 2013).

TRATAMENTO NUMÉRICO DOS MODELOS

Os modelos matemáticos estruturais para placa, viga e pilar são ferramentas que auxiliam o entendimento conceitual do fenômeno e o comportamento de estruturas convencionais na construção civil. Porém, pela demanda dinâmica da enge-

nharia, requisitando soluções práticas e rápidas, a implementação numérica se torna essencial neste processo.

Hoje a engenharia é contemplada por diversos softwares que aceleram os dimensionamentos e análises, entretanto, é importante entender e possuir o conhecimento mínimo sobre os métodos e rotinas de cálculo. Neste contexto, o método das diferenças finitas se torna uma ferramenta robusta para introduzir os conceitos básicos sobre métodos numéricos, devido ao traço indutivo e didático do mesmo (CUMINATO; MENEGUETTE, 2013).

Placa Delgada de Kirchhoff

O tratamento numérico de placas governadas pela teoria de Kirchhoff utilizando a técnica de diferenças finitas baseia-se na aproximação de um operador diferencial de quarta ordem. Por se tratar de um problema bidimensional as derivadas contidas na equação diferencial são parciais.

$$\left. \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right|_{i,j} \approx \frac{1}{(\Delta x)^4} (w_{i+2,j} - 4w_{i+1,j} + 6w_{i,j} - 4w_{i-1,j} + w_{i-2,j})$$

A equação aproxima uma derivada parcial na direção com esquema central de pontos, onde o espaçamento entre pontos da malha nesta direção é contabilizado no termo. De forma análoga, na direção a aproximação da derivada parcial é dada pela expressão:

$$\left. \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right|_{i,j} \approx \frac{1}{(\Delta y)^4} (w_{i,j+2} - 4w_{i,j+1} + 6w_{i,j} - 4w_{i,j-1} + w_{i,j-2})$$

Em que, o espaçamento nesta direção é. Para simplificar os processos, consideram-se os espaçamentos iguais nas direções cartesianas. O operador de quarta ordem contempla ainda uma derivada parcial cruzada de quarta ordem em e, que é aproximada pela expressão algébrica:

$$\left. \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right|_{i,j} \approx \frac{1}{\lambda^4} [4w_{i,j} - 2(w_{i+1,j} + w_{i-1,j} + w_{i,j+1} + w_{i,j-1}) + (w_{i+1,j+1} + w_{i+1,j-1} + w_{i-1,j+1} + w_{i-1,j-1})]$$

Conhecidas as aproximações necessárias para realizar o processo de discretização da equação da placa delgada, apli-

cam-se as expressões aproximadas, e na equação, obtém-se assim, a equação de diferenças finitas para cada ponto nodal.

$$\frac{D}{\lambda^4} [20w_{i,j} - 8(w_{i+1,j} + w_{i-1,j} + w_{i,j+1} + w_{i,j-1}) + 2(w_{i+1,j+1} + w_{i-1,j+1} + w_{i+1,j-1} + w_{i-1,j-1}) + (w_{i+2,j} + w_{i-2,j} + w_{i,j+2} + w_{i,j-2})] = q_{i,j}$$

A equação é aplicada nos pontos internos contidos do domínio discreto, gerando um sistema linear na forma $Kw = Q$, onde w é a deflexão da placa em cada ponto discreto da malha, K é a matriz dos coeficientes e, no contexto da área estrutural, é denotada como matriz de rigidez. Para elucidar de forma didática, adota-se uma malha com nove pontos internos, como representada pela matriz formada abaixo.

$$\begin{bmatrix} 18 & -8 & 1 & -8 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & 19 & -8 & 2 & -8 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -8 & 18 & 0 & 2 & -8 & 0 & 0 & 1 \\ -8 & 2 & 0 & 19 & -8 & 1 & -8 & 2 & 0 \\ 2 & -8 & 2 & -8 & 20 & -8 & 2 & -8 & 2 \\ 0 & 2 & -8 & 1 & -8 & 19 & 0 & 2 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & -8 & 2 & 0 & 18 & -8 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -8 & 2 & -8 & 19 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -8 & 1 & -8 & 18 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \\ w_9 \end{pmatrix} = \frac{q_i}{D} \lambda^4 \begin{pmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \end{pmatrix}$$

A matriz dada pela expressão é válida para uma placa totalmente apoiada, onde a deflexão é nula nas bordas, então, a solução da matriz fornece os valores da deformação da placa. É importante observar o padrão de formação dos elementos da matriz para mais pontos, a fim de realizar corretamente as rotinas computacionais e avaliar qual método de solução melhor se adequa a tal formação para assim obter um menor custo computacional (SZILARD, 2004).

Viga de Euler-Bernoulli

A deflexão da viga é um dos casos clássicos de aplicação do método das diferenças finitas, sendo um problema didático para introduzir seus conceitos. Nesta linha, a discretização da equação de governo consiste em aproximar uma derivada total de quarta ordem.

A expressão algébrica de diferenças finitas que realiza a aproximação se assemelha com a equação (1), restringindo-se ao caso unidimensional. Logo, a equação de governo na forma de diferenças finitas é dada pela expressão:

$$\frac{EI}{(\Delta x)^4} [w_{i-2} - 4w_{i-1} + 6w_i - 4w_{i+1} + w_{i+2}] = q_i$$

Atribuindo uma malha genérica de pontos, o sistema linear na forma matricial possui o seguinte padrão de formação, expresso pela equação:

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 & \dots \\ -4 & 6 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 6 & -4 \\ \vdots & \dots & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{n-1} \\ w_n \end{pmatrix} = \frac{q_i}{EI} (\Delta x)^4 \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Este sistema linear fica restrito a casos de vigas simplesmente apoiadas, onde a deflexão e o momento são nulos nas extremidades. Nota-se que a matriz de rigidez possui um padrão bem definido com diagonais com valores constantes, alterando somente os extremos devido a vinculação da viga.

É fácil de observar que a matriz de rigidez possui uma parcela de elementos que são nulos, tal comportamento é comum nos sistemas lineares formados pelo MDF e tais matrizes são denotadas por esparsas. Esse tipo de formação matricial torna favorável a implementação do algoritmo computacional, entretanto, demandam técnicas específicas de armazenamento e solução.

Flambagem de Pilar

A formulação numérica de um pilar se assemelha com os procedimentos de uma viga, o que é natural por se tratar do mesmo modelo teórico diferencial. As derivadas contidas na equação diferencial de governo são aproximadas pela expressão (2) e a forma unidimensional da equação, assim, pode-se escrever a equação de diferenças finitas para o pilar como dado na equação:

$$(y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2}) + \frac{P}{EI} (\Delta x)^2 (y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) = 0$$

Para uma malha genérica, a fim de analisar o padrão de formação da matriz com as devidas condições de contorno, observa-se a construção de um sistema com o formato (3). Este sistema induz um problema de autovalores, pois a carga é desconhecida. Logo, para um caso de um pilar com uma extremidade engastada e outra presa por pino, o sistema matricial é dada pela expressão:

$$\begin{bmatrix} 7 & -4 & 1 & 0 & \dots \\ -4 & 6 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 6 & -4 \\ \vdots & \dots & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} + \frac{P}{EI} (\Delta x)^2 \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \dots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Percebe-se que a matriz de rigidez é semelhante ao caso da viga, alterando somente um coeficiente superior devido ao engastamento no pilar, deste modo, para alterar a vinculação do pilar basta configurar a matriz. A solução do problema de autovaleiros fornece a carga crítica de flambagem do pilar e ainda os autovetores deste problema fornecem os valores do deslocamento do pilar caso o tal flambe (IREMONGER, 1980).

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Os resultados baseiam-se nas soluções dos modelos diferenciais de laje, viga e pilar via o método das diferenças finitas e suas respectivas soluções analíticas para fim de validação dos dados obtidos. A metodologia de análise fundamenta-se em duas óticas, sendo uma abordagem destinada a análise de eficiência do método numérico e uma perspectiva voltada a prática da engenharia.

As características geométricas e propriedades de cada estrutura estudada são ilustradas na Tabela 1. Considera-se que a seção transversal dos elementos é retangular, a vinculação da laje e da viga são simplesmente apoiadas e o pilar com a extremidade engastada e apoiada.

Tabela 1: Propriedades geométricas e materiais.

Grandezas	Placa	Viga	Pilar	Und.
Comprimento	6,00	6,00	4,00	m
Largura	6,00	0,30	0,25	m
Espessura	0,12	0,50	0,15	m
Coefficiente Poisson	0,20	0,00	0,00	--
Módulo de Elasticidade	32	32	32	GPa

Fonte: Acervo pessoal (2017)

A laje e a viga estão submetidas a um carregamento distribuído de e, respectivamente. É importante frisar que no dimensionamento de peças estruturais existe uma transferência de cargas para cada elemento contido na estrutura, contudo, tais valores adotados são para fins didáticos no intuito de avaliar o comportamento do método numérico, mesmo sabendo, que existe uma

demanda de cálculo extensa na determinação de cargas, dimensões e características estruturais (CARVALHO; FILHO, 2004).

No processo de aplicação dos métodos numéricos é fundamental ter uma referência para avaliar se o método gerou resultados satisfatórios para o problema estudado. Logo, para garantir a confiabilidade dos resultados obtidos utilizam-se as soluções analíticas dos modelos matemáticos respeitando os casos propostos.

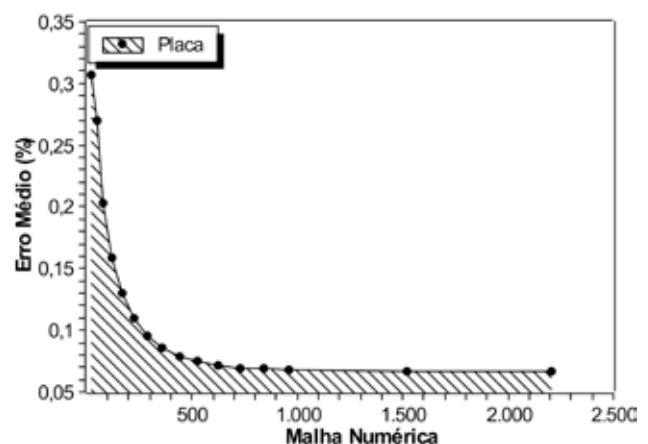
O primeiro caso é a deflexão da placa simplesmente apoiada submetida a um carregamento distribuído, uma possível solução analítica foi determinada por M. Levy, dada pela equação onde e são o comprimento e largura da placa respectivamente.

$$w(x,y) = \frac{4qa^4}{\pi^3 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^3} \left(1 - \frac{\alpha_m \tanh \alpha_m + 2}{2 \cosh \alpha_m} \cosh \frac{2\alpha_m y}{b} + \frac{\alpha_m}{2 \cosh \alpha_m} \frac{2y}{b} \sinh \frac{2\alpha_m y}{b} \right) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

$$\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a}$$

A equação converge rapidamente com os primeiros termos da somatória e para maiores detalhes e aprofundamentos sobre tal expressão vide Timoshenko & Woinowsky (1959). Desta forma, é possível analisar o comportamento do MDF em tal problema, já sendo conhecida sua solução analítica.

Figura 4: Análise do erro médio para placa



Fonte: Acervo pessoal (2017)

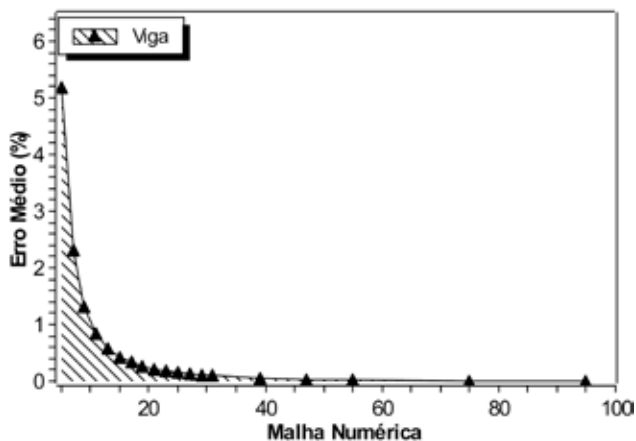
A Figura 4 expõe uma análise gráfica do erro médio em relação a malha numérica, este erro por sua vez, se baseia na definição de erro relativo como exposto em Fortuna (2000). A curva de erro apresentada na Figura 4, mostra uma queda contínua com o refinamento da malha numérica, gerando um erro menor que 0,1%, mostrando assim, o bom desempenho do método nesta aplicação.

Para o caso da deflexão de viga, o domínio é unidimensional o que torna o problema relativamente mais simples matematicamente e numericamente, gerando assim, um menor custo computacional. A solução analítica para uma viga com extremidades apoiadas e submetida a um carregamento é apresentada abaixo.

$$w(x) = \frac{-qx}{24EI} (x^3 - 2Lx^2 + L^3)$$

A equação é usada como solução de referência na avaliação de desempenho do MDF. A curva de erro médio percentual mostrado pela Figura 5, apresenta um comportamento decrescente de natureza monotônica, evidenciando um comportamento assertivo neste problema com um erro quase próximo de zero para uma malha de 100 pontos no domínio discreto e com um custo computacional de execução baixo na ordem de grandeza de segundos.

Figura 5: Análise do erro médio para viga



Fonte: Acervo pessoal (2017)

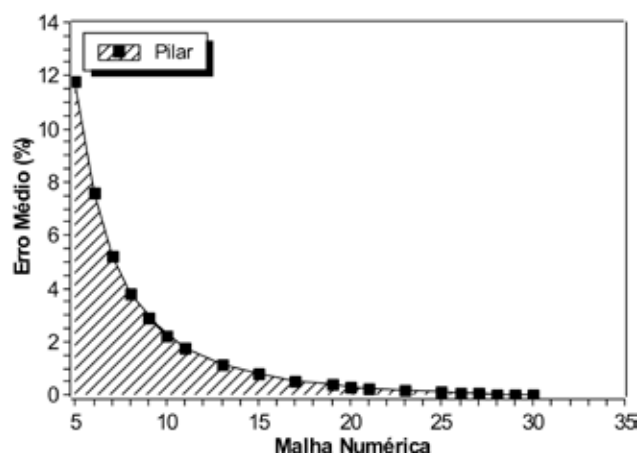
Para o caso do problema de autovalores na determinação da carga crítica do pilar, a solução analítica é dada pela equa-

ção 16 em função de um fator que é função dos tipos de articulação de um pilar. Para o caso proposto tem-se que:

$$(P_{cr})_{\eta} = \frac{\pi^2 EI_{\eta}}{(KL)^2}$$

Nota-se que existe um índice que se remete ao eixo cartesiano que é feita a análise. Em termos de eficiência do método para este problema, não importa qual eixo é analisado, pois o erro médio será igual em qualquer caso. Logo, o comportamento gráfico do erro médio percentual é mostrado na Figura 6.

Figura 6: Análise do erro médio para pilar



Fonte: Acervo pessoal (2017)

Uma análise da curva de erro para o pilar evidencia um decréscimo rápido do erro com o aumento do número de pontos no domínio, mostrando um erro próximo de zero para uma malha unidimensional de 30 nós. Desta forma, o método das diferenças finitas apresenta-se novamente como técnica que fornece bons resultados também para este problema.

Em contrapartida a esta ótica de eficiência e comportamento do método numérico, existe uma vertente que implica numa análise prática para a implementação e uso das técnicas numéricas, com vista em aplicações reais. Em projetos e cálculos para dimensionamento de peças estruturais necessita-se, constantemente, de obterem-se valores máximos de grandezas a fim de avaliar a melhor configuração quanto a custo-benefício. Nesta linha, em aspectos relativos a projetos é importante conhecer, por exemplo, a máxima deformação e solici-

tação internas críticas as quais uma estrutura será submetida (CARVALHO; FILHO, 2004).

Nesse contexto, os métodos numéricos podem ser muito úteis na determinação da deformação máxima que a laje e a viga sofrem. Através das equações e é possível determinar o ponto crítico de deformação que ocorrerá em tais estruturas, tal ponto ocorre no centro de cada elemento, obtendo-se os valores analíticos mostrados na Tabela 2.

Tabela 2: Análise da deformação máxima da placa e da viga

Malha	Deflexão Máxima da Placa [mm]	Malha	Flecha Máxima da Viga [mm]
25	10,8765	5	1,7719
121	10,9555	7	1,7250
289	10,9634	15	1,6944
441	10,9658	25	1,6898
961	10,9670	55	1,6880
2209	10,9678	95	1,6877
Analítico	10,9700	Analítico	1,6875

Fonte: Acervo pessoal (2017)

Percebe-se na Tabela 2 que o valor em ambas as estruturas se aproximam do valor analítico com o refinamento da malha, mostrando como o método foi eficiente na determinação da deformação máxima. É importante ressaltar que este tipo de análise numérica foca em estimar somente o valor máximo da deformação, não analisando, portanto, a eficiência do método das diferenças finitas na malha total, mas tão somente no ponto central onde ocorre a deformação máxima. Em outras palavras, as análises e resultados extraídos do problema, irão depender criteriosamente da aplicação e destino que o profissional visa oferecer para o problema estudado (FORTUNA, 2000).

Por fim, quando se determina a carga crítica de flambagem de um pilar é utilizado o menor momento de inércia, pois é neste eixo que ocorre a tendência da flambagem da peça. No caso da seção retangular do pilar tem-se que, desta forma, é esperado que a peça flambasse em torno do eixo (HIBBELER, 2006).

Tabela 3: Cargas críticas do pilar		
Malha	(Pcr)x [kN]	(Pcr)y [kN]
5	6940,31	2498,51
10	7691,96	2769,10
15	7805,71	2810,06
20	7842,62	2823,34
25	7859,04	2829,25
30	7867,74	2832,39
Analítico	7867,99	2832,48

Fonte: Acervo pessoal (2017)

A Tabela 3 mostra os valores analíticos e numéricos das cargas críticas em relação a cada eixo cartesiano e com o refinamento da malha nota-se que os valores se aproximam da solução de referência. É possível perceber ainda que a carga crítica em x é menor que em y , o que já era o esperado.

Na prática quando se dimensiona uma viga ou laje é natural e esperado haver uma certa deformação devido, por exemplo, ao peso próprio, cargas externas e ações excepcionais as quais estruturas são submetidas. No entanto, para o dimensionamento dos pilares não deve ocorrer o fenômeno de flambagem pois caso ocorra a estrutura entra em um estado de risco e perda de resistência. Por isso, é indesejável na engenharia que a carga crítica de um pilar seja ultrapassada.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A aplicação da experimentação numérica via método das diferenças finitas, nos modelos diferenciais clássicos de placas, vigas e pilares, apresentou um excelente desempenho, com um baixo custo computacional associado e geração de resultados com erros diminutos no que tange à ordem de grandeza. Desta forma, fica consolidado que o método de aproximações por diferenças finitas apresenta-se como uma técnica robusta e versátil na resolução de problemas na seara da engenharia estrutural.

Neste contexto, a engenharia como ciência, busca continuamente a determinação do melhor custo-benefício para uma aplicação específica, fazendo uso dos métodos numéricos, de forma sistêmica. Tais técnicas proporcionam uma análise paramétrica, o que possibilita testar diversas configurações para uma estrutura, de forma, a aperfeiçoar o projeto em questão. Neste âmbito, o viés numérico desempenha uma função dinamizadora no tocante a determinar os valores máximos e consequentemente assegurar os critérios pré-estabelecidos

por normas técnica, que transitam de itens como a resistência mecânica como até o conforto visual da estrutura.

Por fim, o uso dos métodos numéricos na engenharia se tornou um alicerce sólido e essencial nas análises de fenômenos e comportamentos de sistemas estruturais. Logo, é imprescindível que os profissionais e estudantes de engenharia busquem um arcabouço conceitual-matemático consistente, que seja capaz de facultar a capacidade de interpretar e avaliar assertivamente os dados e comportamentos intrínsecos aos fenômenos físicos, modelos matemáticos correlatos e implementação de técnicas numéricas de solução.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BREBBIA, C. A. The birth of the boundary element method from conception to application. [s.l.] Elsevier, 2016.
- CARRER, J. A. M. *et al.* Dynamic analysis of Timoshenko beams by the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 37, n. 12, p. 1602–1616, 2013.
- CARVALHO, P. G. S. Análise estrutural de placas: modelagem computacional para as teorias de Reissner-Mindlin e Kirchhoff. v. 2, p. 257–276, 2016.
- CARVALHO, R. C.; FILHO, J. R. DE F. Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado: segundo a NBR 6118: 2003. São Paulo: Edufscar, 2004.
- CLÓVIS, R. M. Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional. 2a ed ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.
- CUMINATO, J. A.; MENEGUETTE, M. Discretização de equações diferenciais parciais: técnicas de diferenças finitas. São Paulo: ICMC/USP, 2013.
- FORTUNA, A. DE O. Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos. São Paulo: Edusp, 2000.
- GILAT, A.; SUBRAMANIAM, V. Métodos numéricos para engenheiros e cientistas: uma introdução com aplicações usando o MATLAB. São Paulo: Bookman Editora, 2009.
- HIBBELER, R. C. Resistência dos materiais. 7. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.
- IREMONGER, M. J. Finite difference buckling analysis of non-uniform columns. *Computers & Structures*, v. 12, n. 5, p. 741–748, 1980.
- KREYSZIG, E. Matemática Superior Para Engenharia. Rio de Janeiro: Grupo Gen-LTC, 2000.
- MINDLIN, R. D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motion of isotropic, elastic plates. n. *ASME Journal of Applied Mechanics*, p. 18:31–38, 1951.
- NETO, C. L.; MANSUR, W. J.; BARCELOS, H. M. Comparação de Desempenho entre o Método dos Elementos de Contorno com Integração Direta e o Método dos Elementos Finitos em Problemas de Helmholtz. *Blucher Physics Proceedings*, v. 2, n. 1, p. 67–71, 2015.
- SZILARD, R. Theories and applications of plate analysis: classical numerical and engineering methods. Hoboken, New Jersey.: John Wiley & Sons, 2004.
- TIMOSHENKO, S. Theory of elasticity. United States of America: McGraw-Hill book Company, 1964.
- TIMOSHENKO, S. P.; WOINOWSKY-KRIEGER, S. Theory of plates and shells. United States of America: McGraw-hill, 1959.

CURRÍCULOS

* Graduação em Engenharia Civil pela Faculdade Capixaba da Serra, Brasil (2017)

** Ensino Médio (2o grau) pela União de Professores, Brasil (2013)

*** Bacharel em Engenharia de Petróleo pela Universidade Vila Velha-UVV (2010). Especialista em Docência do Ensino Superior (2015). Mestrando em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal do Espírito Santo- UFES (2017). Professor Universitário em Engenharia Mecânica/Civil/Petróleo (2012-2016) Coordenador do Grupo de Estudos em Métodos Numéricos Computacionais (GEMNC)